В. СЕРПИНСКИЙ

[redacted]

Математическое просвещение

ВАЦЛАВ СЕРПИНСКИЙ

250 задач по элементарной теории чисел

Перевод с польского И. Г. Мельникова

ИЗДАТЕЛЬСТВО
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
Москва 1968

WACŁAW SIERPIŃSKI

200 ZADAN Z ELEMENTARNEJ TEORII LICZB



WARSZAWA
PAŃSTWOWE ZAKŁADY WYDAWNICTW SZKOLNYCH

ВЫДАЮЩИЙСЯ ПОЛЬСКИЙ МАТЕМАТИК ВАЦЛАВ СЕРПИНСКИЙ

(К 85-летию со дня рождения)

Четырнадцатого марта 1882 г. в Варшаве в семье врача Константина Серпинского родился мальчик, которому дали два имени: Вацлав Франциск. Этому мальчику суждено было стать одним из крупнейших польских математиков.

Образование Вацлав Серпинский получил в Варшаве. Здесь он окончил гимназию и университет.

Незаурядные способности Серпинского обнаружились рано, повышенный же интерес к математике наметился лишь в последних классах гимназии под влиянием двух его соучеников, владевших некоторыми разделами высшей математики, и прекрасного учителя математики Влодзимежа Влодарского. Последний был очень высокого мнения о математических способностях Серпинского. В гимназии у Серпинского было еще несколько замечательных учителей. Так, его учителем французского языка был К. Аппель, впоследствии профессор Варшавского университета.

Среди сверстников Серпинского по гимназии было немало способных людей. Из класса, в котором учился Серпинский, вышло заметное число ученых и деятелей культуры, из коих отметим известного астронома Тадеуша Банахевича.

Уже в школьные годы Серпинский проявлял большой интерес к общественным делам. Вместе с несколькими своими друзьями он организовал тайную школу для мальчиков из рабочей среды. Эта хорошо законспирированная школа на протяжении ряда лет успешно готовила своих учащихся к экзамену за четыре класса гимназии.

В 1900 г. Серпинский поступил на физико-математический факультет Варшавского университета, который в ту пору представлял собой молодое учебное заведение с преподаванием на русском языке, существовавшее всего около трех десятилетий[1].

Следует заметить, что поляки, имевшие возможность учиться в старинных польских университетах (в Краковском и Львовском), охотно шли и в новый университет. Трудности, которые испытывал университет в первые годы своего существования (отсутствие традиций, хороших научно-педагогических кадров и др.), вскоре были преодолены.

Активная и разнообразная деятельность работавших здесь математиков М. А. Андреевского, Н. Н. Алексеева и Н. Я. Сонина на первой стадии, а затем В. А. Анисимова, Н. Н. Зинина и Г. Ф. Вороного позволила уже к концу XIX в. приблизить уровень преподавания математики в Варшавском университете к уровню преподавания математики в университетах Петербурга, Москвы, Казани, Харькова, Дерпта (Тарту)[2].

Наибольшее влияние на Серпинского оказал питомец Петербургского университета профессор математики, впоследствии член-корреспондент Российской Академии наук, Георгий Федосеевич Вороной (1868—1908). Деятельность Вороного в Варшавском университете началась в 1894 г. и продолжалась там с небольшими перерывами до его безвременной смерти. Вороной — первоклассный ученый, на трудах которого лежит печать гениальности. Вместе с Германом Минковским он является создателем геометрии чисел. Глубокие и важные результаты были получены им в аналитической теории чисел, а также в теории алгебраических чисел. Его проблематика разрабатывалась в нашей стране Б. А. Венковым (1900—1962), Б. Н. Делоне (род. в 1890 г.), Д. К. Фаддеевым (род. в 1907 г.) и др., а также зарубежными математиками. Г. Ф. Вороной принадлежал к Петербургской школе теории чисел, и в ней он занимал одно из самых видных мест.

Серпинский прослушал несколько лекционных курсов у Вороного и выполнил свою первую научную работу по аналитической теории чисел в духе идей и методов Вороного на тему, предложенную последним для конкурсных студенческих сочинений. Подробный отзыв Вороного на эту работу был напечатан в VI выпуске «Варшавских университетских известий» за 1904 г. Вороной ходатайствовал о присуждении Серпинскому золотой медали и об оставлении его при университете для подготов-

---

[1] Этот университет был создан на базе Главной школы, существовавшей в Варшаве в 1862—1869 гг. С начала XIX столетия до 1832 г. в Варшаве был польский университет.

[2] Ср.: С. Е. Белозеров. Математика в Ростовском университете. Ист.-мат. исслед., вып. VI. М., Гостехиздат, 1953, стр. 247—352.

ки к профессорскому званию. Имя Вороного Серпинский вспоминает всегда с большой теплотой [1].

Сохранился диплом Серпинского об окончании университета. Ниже мы воспроизводим текст этого интересного документа, подписанного ректором Варшавского университета П. А. Зиловым и за декана физико-математического факультета профессором Н. Н. Зининым (сыном известного русского химика академика Н. Н. Зинина).

ДИПЛОМ

Совет Императорского Варшавского Университета сим объявляет, что Вацлав Франциск (2-х имен) Константинович Серпинский, поступив в число студентов Варшавского Университета в начале 1900/1901 учебного года, выслушал в течение 1900/1901, 1901/2, 1902/3, и 1903/4 учебных годов полный курс наук, преподаваемых на четырех курсах математического отделения Физико-Математического Факультета сего Университета, и на окончательных испытаниях оказал следующие познания: в Геометрии, Анализе, Теории чисел, Теории вероятностей, Механике, Астрономии, Геодезии, Математической физике, Опытной физике, Физической географии и Химии — отличные (5); в Русском языке и сочинении—хорошо (4). Письменный его ответ оценен баллом 5 (отлично).

Представленное же им сочинение, под девизом «Summa» на тему: «О суммировании ряда $\sum\limits_{n>a}^{n<b}\tau(n)f(n)$ при условии, что $\tau(n)$ представляет число разложений n на сумму квадратов двух целых чисел» в заседании Совета 27 Мая 1904 года, награждено золотою медалью. Посему он, Серпинский, согласно примечанию к § 96 Университетского Устава признан Физико-Математическим Факультетом достойным ученой степени Кандидата и, на основании п. 3 л. А § 48 Университетского устава, утвержден в этой степени Советом Университета 19 Июня 1904 года. Вследствие сего, г. Серпинскому предоставляются все права и преимущества, законами Российской империи со степенью Кандидата соединямые. В удостоверении чего дан сей диплом от Совета Императорского Варшавского Университета, с приложением Университетской печати. Г. Варшава, Апреля 1 дня, 1905 года.

После окончания университета Серпинский преподавал математику в двух гимназиях Варшавы. Учительская деятельность его была непро-

[1] Вороной умер 20 ноября 1908 г. Спустя три дня Серпинский — доцент Львовского университета — одну из своих лекций по расписанию заменил лекцией о Вороном. Эта лекция опубликована в журнале «Wiadomosci Matematyczne», т. 13, 1909, стр. 1—4.

должительной, так как в 1905 г. после забастовки учащейся молодежи, к которой он примкнул, ему пришлось покинуть Варшаву. Серпинский поступил на философское отделение Ягеллонского университета в Кракове, где работали два известных польских математика: Станислав Заремба и Казимир Жоравский; первый был специалистом в теории дифференциальных уравнений, второй — в области геометрии. Уже в 1906 г. Серпинский сдал экзамены по математике, астрономии и философии, обязательные для соискателя докторской степени, и на основании диссертации «О суммировании ряда $\sum\limits_{m^2+n^2\leqslant x} f(m^2+n^2)$» получил ученую степень доктора философии. По возвращении в Варшаву Серпинский преподает математику в частных средних школах, в учительской семинарии и на курсах, игравших роль польского университета (Варшавский университет в 1905—1908 гг. был закрыт), и значительную часть своего времени посвящает научно-исследовательской работе. В 1906 г. появилась его первая печатная работа (на польском языке) под названием «Об одной задаче из теории асимптотических функций». По своей проблематике и методу эта работа примыкает к работе Вороного с таким же названием, опубликованной в 1903 г. в журнале Крелле на французском языке. Интересно отметить, что этот же мемуар Вороного был одним из отправных пунктов для выдающихся исследований академика И. М. Виноградова.

В упомянутой работе Серпинский вывел формулу, позволяющую приближенно вычислять число точек $A(n)$ с целочисленными координатами x, y в круге $x^2+y^2\leqslant n$. Формула Серпинского[1] имеет вид:

$$A(n) = \pi n + O(\sqrt[3]{n}).$$

В другой работе, напечатанной в 1909 г., он предложил новую асимптотическую формулу, дающую число целых точек в шаре $x^2+y^2+z^2\leqslant n$.

Обе эти работы и многие другие исследования Серпинского выполнены в стиле Петербургской школы, характерными чертами которого являются четкая постановка конкретных вопросов и доведение решения задачи до «алгорифма» — формулы, удобной для вычисления.

В 1907 г. Серпинский опубликовал опять только одну работу, на этот раз из анализа и на французском языке. Начиная с 1908 г. число его печатных работ быстро растет, тематика их становится весьма разнообразной, они появляются на языках польском и французском, причем последним Серпинский пользуется все чаще и чаще. В 1948 г. в списке печатных работ Серпинского значилось 512 мемуаров и 15 моногра-

[1] Запись $f(t) = O(g(t))$ означает, что для всех достаточно больших t выполняется неравенство $|f(t)| < Kg(t)$, где K — некоторая постоянная. Приведенная теорема Серпинского была снова доказана в 1913 г. известным немецким математиком Э. Ландау.

фий и учебников. Выдающийся вклад Серпинского в науку был высоко оценен его соотечественниками и математиками всего мира. VI математический съезд польские математики провели осенью 1948 г., совместив его с 40-летием университетской деятельности Серпинского[1]. Много теплых слов было сказано здесь в адрес Серпинского. От математиков Советского Союза юбиляра поздравил А. Н. Колмогоров. Он сказал: «От имени Академии наук СССР и Московского математического общества я приветствую профессора Серпинского с сорокалетием научной деятельности.

Советские математики высоко ценят научные работы профессора Серпинского и его заслуги как создателя польской математической школы, занявшей видное место среди мировых научных школ.

Позвольте пожелать Вам, Вацлав Константинович, долгих лет дальнейшей продуктивной работы».

Обилие работ Серпинского, почти фантастическое число их, не позволяет задерживаться здесь на отдельных работах и вынуждает характеризовать его научное творчество в самых общих чертах. Лишь в виде исключения мы остановимся здесь на характеристике четырех из девяти работ, опубликованных Серпинским в 1908 г.

Эти ранние работы Серпинского, как и его первая печатная работа, примечательны в том отношении, что в них сразу же раскрывается математическое дарование автора и его весьма высокая научная квалификация.

В большой работе «О суммировании ряда $\Sigma\tau(n)f(n)$...», в основу которой Серпинский положил свое студенческое сочинение, среди различных арифметических результатов мы встречаем оценки для сумм вида

$$\sum_{n=1}^{x} \tau(n^2), \quad \sum_{n=1}^{x} \tau^2(n), \quad \sum_{n=1}^{x} \tau_8(n),$$

где $\tau(n)$ и $\tau_8(n)$ обозначают соответственно число разложений n на 2 и 8 квадратов.

В другой работе под названием «Об одном случае ошибочного применения правила умножения вероятностей» Серпинский показывает, что вероятность того, что два натуральных числа, не превосходящих n, являются взаимно простыми, равна

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \mu(k) \left[\frac{n}{k} \right]^2$$

[1] „VI Polski zjazd matematyczny. Jubileusz 40-lecia działalności na katedrze uniwersyteckiej profesora Wacława Sierpińskiego, Warszawa, 23. 9. 1948". Warszawa, 1949, 94 стр.

(где символ μ означает функцию Мёбиуса, а квадратные скобки — целую часть), вопреки тому, что сообщает П. Бахман в своей книге «Die analytische Zahlehtheorie» (Leipzig, 1894, стр. 430).

Новый классический результат Серпинский получает в работе «О разложении целых чисел на разность двух квадратов». Здесь он показал, что число различных представлений натурального числа n в виде разности двух квадратов равно удвоенной разности между числом четных и числом нечетных делителей n.

В годы учебы Серпинского в университетах еще не изучались вопросы теории множеств. О трудах основоположника теории множеств Георга Кантора (1845—1918) многие математики либо ничего не знали, либо имели лишь смутное представление. Открыв совершенно самостоятельно в 1907 г. один любопытнейший факт из теории множеств, Серпинский написал о нем в Гёттинген Банахевичу. Последний сразу же ответил телеграммой, текст которой содержал одно лишь слово «Кантор», и вскоре прислал соответствующую литературу. С этого времени одним из главных предметов занятий Серпинского становится теория множеств с ее выходами в топологию, теорию функций действительного переменного, математическую логику и другие области математики.

Первая работа Серпинского по теории множеств была опубликована в 1908 г. под названием «Об одной теореме Кантора»; в ней Серпинский дал найденное им независимо от Кантора доказательство известной ныне каждому студенту теоремы о том, что положение точки на плоскости может быть определено одним действительным числом, из чего уже легко следует эквивалентность множеств точек прямой и плоскости, и вообще пространств любого числа измерений.

В дальнейшем Серпинский получил большое количество важных и глубоких результатов, относящихся как к абстрактной теории множеств, так и к ее топологическим приложениям (в связи с исследованием проблемы размерности), а особенно — к проблематике, пограничной между собственно теорией множеств и математической логикой. Здесь в первую очередь следует отметить изучение (самим Серпинским, а затем и его многочисленными учениками) обширного класса предложений, эквивалентных знаменитой континуум-гипотезе Кантора и так называемой аксиоме выбора теории множеств, и геометрических следствий этой аксиомы, носящих зачастую внешне парадоксальный характер [1].

Перу Серпинского принадлежит более десятка капитальных трудов по теории множеств, теории функций и топологии, в том числе ставшие уже классическими монографии «Leçons sur les nombres transfinis»

---

[1] Подробнее об этой проблематике см. А. Френкель и И. Бар-Хиллел. Основания теории множеств, пер. с англ., М., «Мир», 1966, гл. II; первоначальные сведения можно также найти в книжке Серпинского «О теории множеств», русский перевод которой в 1966 г. положил начало серии «Математическое просвещение». — *Прим. ред.*

(«Лекции о трансфинитных числах»), опубликованная в 1950 г. в Париже, и «Cardinal and ordinal numbers» («Кардинальные и порядковые числа»), вышедшая в 1958 г. в Варшаве.

Начало деятельности Серпинского в математике было весьма удачным, и он вскоре приобрел известность. С осени 1908 г. Серпинский работает во Львовском университете, куда его пригласил тогдашний ректор, специалист по теории аналитических функций И. Пужина. Уже в следующем учебном году он прочитал курс лекций под названием «Теория множеств», который, как свидетельствует чешский историк математики Гвидо Феттер, был первым в мире самостоятельным университетским курсом теории множеств. К этим лекциям студенты проявили особый интерес. Для некоторых из них этот курс определил область, в которой позднее они прославились как видные исследователи. Среди первых учеников Серпинского были студенты О. Никодым, теперь профессор одного из американских университетов, и С. Ружевич, позднее профессор Львовского университета и ректор Академии внешней торговли, убитый немецко-фашистскими захватчиками в 1941 г. вместе с несколькими десятками профессоров Львова.

В 1910 г. Львовский университет присвоил Серпинскому звание профессора, а спустя год Краковская Академия наук наградила его за труды, опубликованные в 1909—1910 гг. на польском языке. Деятельность Серпинского привлекает внимание молодых талантливых математиков. В 1913 г. во Львов прибыли С. Мазуркевич, чтобы пройти у него докторантуру, и З. Янишевский, уже получивший степень доктора в Парижском университете за работу по топологии. Круг учеников и сотрудников Серпинского, проявляющих интерес к теоретико-множественной тематике, заметно расширяется, и здесь во Львове, городе, входящем тогда в состав Австро-Венгрии, зарождается новая математическая школа — Польская.

Примерно в это же время в России возникает новая математическая школа — Московская школа теории функций действительного переменного.

Идеи теоретико-множественной математики проникли в русскую литературу уже в самом начале XX века. К этому времени относится первый курс лекций по теории функций действительного переменного, прочитанный в Московском университете Б. К. Млодзеевским, опубликование в 1907 г. И. И. Жегалкиным магистерской диссертации «Трансфинитные числа» и, наконец, появление в 1911 г. знаменитой работы Д. Ф. Егорова «О последовательности измеримых функций».

Решающее значение для возникновения новой математической школы имела деятельность в области теории функций Н. Н. Лузина (1883—1950), ученика Д. Ф. Егорова по Московскому университету. Свои первые работы (они появляются уже в 1911 г.) Лузин присылает из Гёттин-

гена и Парижа, где на протяжении четырех лет (1910—1914) он слушает лекции крупнейших математиков и ведет интенсивную научную работу.

Появление в 1915 г. докторской диссертации Лузина «Интеграл и тригонометрический ряд» оказало сильное влияние на дальнейшее развитие теории функций. По-видимому, с этого времени Лузин становится признанным главой Московской математической школы, сразу заявившей о себе выдающимися исследованиями самого Лузина и его учеников: П. С. Александрова, Д. Е . Меньшова, М. Я. Суслина и А. Я. Хинчина.

Полный расцвет школы Лузина приходится на советский период, когда, наряду с работами Лузина и его первых учеников, появляются работы А. Н. Колмогорова, М. А. Лаврентьева, П. С. Новикова, П. С. Урысона, Л. В. Келдыш и других исследователей.

Влияние Московской школы на развитие математики в нашей стране становилось все более и более ощутительным в связи с проникновением идей теории множеств в функциональный анализ, теорию вероятностей, теорию дифференциальных уравнений и в другие отрасли математики.

Влияние Московской школы сказалось и на развитии математики за рубежом. «Особенно значительным было влияние на польскую математику, где возникла сильная школа теории функций (В. Серпинский, Г. Штейнгауз, С. Мазуркевич, А. Райхман, А. Зыгмунд, С. Банах и др.); оно сказывалось и на творчестве французских, английских, немецких и японских ученых» [1].

Научная и литературная деятельность Серпинского уже в самом начале получает в Польше высокое признание. В 1913 г. Краковская Академия наук присуждает Серпинскому премию за «Очерк теории множеств», а в 1917 г. — за монографию «Теория чисел». Обе книги были опубликованы в Варшаве на польском языке: первая в 1912 г., вторая в 1914 г.

В начале первой мировой войны Серпинский был интернирован (как гражданин г. Львова, входящего тогда в состав Австро-Венгрии) и направлен в г. Вятку. Но здесь Серпинский пробыл сравнительно недолго, так как Д. Ф. Егорову и Б. К. Млодзеевскому после больших хлопот и усилий удалось получить для него разрешение на жительство в Москве.

В 1915 г. Серпинский приехал в Москву, где на протяжении почти трех лет он продолжал свою научную и литературную деятельность и имел полезные контакты с русскими математиками. Возможность общения с Серпинским радовала многих московских математиков. Так,

---

[1] А. П. Юшкевич, Математика. В кн.: «История естествознания в России», т. 2, М., изд-во АН СССР, 1960, стр. 194.

П. С. Александров (в то время студент Лузина) замечает, что он был счастлив, когда осенью 1915 г. ему довелось докладывать о своей первой научной работе в присутствии Серпинского[1]. С чувством большой благодарности Серпинский вспоминает о внимании и заботе, которые были проявлены к нему Егоровым, Млодзеевским и другими московскими математиками. Но совершенно особое значение для Серпинского имела возникшая здесь большая дружба между ним и Лузиным[2]. Эта дружба, основанная на общности научных интересов, закрепленная совместными исследованиями и результатами, служила источником вдохновения для обоих математиков на протяжении нескольких десятилетий, до самой смерти Лузина.

В Вятке и в Москве Серпинского не покидала мысль о создании польского университета в Варшаве. Здесь он подготовил первый том «Математического анализа» в двух частях и опубликовал его в Москве на польском языке в 1916—1917 гг. Эта книга была переиздана в 1923 г. в Варшаве и на протяжении ряда лет служила учебным пособием для польских студентов. За 1915—1918 гг. Серпинским было опубликовано 36 работ (из коих четыре совместно с Лузиным), т. е. столько же, сколько за четыре предыдущих года.

Весной 1917 г. из польских газет, выходящих в Москве, Серпинский неожиданно узнал, что Краковская Академия наук избрала его своим членом-корреспондентом. Это известие его очень обрадовало. Вскоре после Октябрьской революции Серпинский возвращается во Львов и приступает к работе в университете. Осенью 1918 г. он получает кафедру во вновь созданном Варшавском университете. В Варшаве Серпинский застал своих друзей профессоров З. Янишевского и С. Мазуркевича, с которыми он сразу же приступил к осуществлению программы развития математики в Польше. В 1919 г. эти три математика приняли решение о создании первого в мире специализированного математического журнала «Fundamenta Mathematicae», посвященного теории множеств, топологии, теории функций действительного переменного и математической логике. Тогда многие видные математики (среди которых был А. Лебег) не верили в успех этого начинания, им казалось, что журнал, игнорирующий остальные отрасли математики, не будет жизнестойким. Первый том журнала появился в 1920 г., через несколько месяцев после смерти З. Янишевского — одного из его основателей. Начатое дело Серпинский продолжал с Мазуркевичем до смерти последнего в 1945 г., затем нелегкие обязанности редактора он выполнял с К. Куратовским, в последние же годы Серпинский является почетным редактором журна-

[1] См: P. S. Aleksandrow. O współpracy polskiej i radzieckiej szkoły matematycznej, Wiadomości matematyczne, VI, 1963, стр. 177.

[2] Сохранилась фотография, на которой сняты Егоров, Лузин и Серпинский. См.: «Ист.-мат. исслед.», вып. VIII. М., 1955, стр. 70.

ла, а Куратовский — редактором. Этот журнал сыграл большую роль в развитии математики не только в Польше, но и во всех странах, где ею занимаются. Еще в 1935 г., когда вышел 25-й том журнала, один американский математик сказал, что история «F. M.» является одновременно историей современной теории функций действительного переменного, а в 1962 г., когда вышел 50-й том, П. С. Александров заявил, что юбилей этого журнала является праздником для математиков всего мира. Серпинский как-то заметил, что в 50 томах «F. M.» содержится 1500 работ 420 различных авторов, в том числе около 300 зарубежных, среди которых немало крупнейших математиков современности. Думается, что в этой связи уместно подчеркнуть особую ценность вклада польских математиков и, в частности, самого Серпинского, которому из упомянутых им 1500 работ принадлежат 262.

В 1921 г. Серпинский был избран действительным членом Польской Академии наук. Во многих странах мира обращают внимание на его исключительно высокую творческую активность, выдающиеся литературные, педагогические и организационные способности. Серпинский получает приглашения от многих зарубежных университетов. Он читает лекции в Страсбурге, Сорбонне, Яссах, Брюсселе, Женеве, Базеле, Праге, Будапеште, Риме и в других городах. Имя Серпинского быстро приобретает огромную популярность. В математическую литературу прочно вошли термины: «Универсальная кривая Серпинского», «Треугольная кривая Серпинского», «S-континуум» и др.

В годы второй мировой войны Серпинский не прекращал научную работу и даже преподавал в подпольном университете Варшавы. Осенью 1944 г., когда немецкие войска начали сжигать Варшаву, Серпинский вынужден был покинуть город. Заботливые друзья вывезли его в Мехувский уезд.

В феврале 1945 г., после освобождения Польши советскими войсками Серпинский пешком отправился в Краков. Здесь его во второй раз приютил Ягеллонский университет. Он приступил к чтению лекций и стал печатать статьи и книги, написанные им во время оккупации. Здесь же он спустя несколько месяцев возобновил издание журнала «F. M.», которое было прервано войной.

С осени 1945 г. Серпинский в Варшаве. И снова большой труд по восстановлению университета. Снова лекции в различных университетах Европы, Индии, Канады, США, доклады и сообщения на симпозиумах и съездах. Деятельность Серпинского получает высокую оценку в Польской Народной Республике. В 1949 г. ему была присуждена Государственная премия первой степени, а в 1951 г. была выбита медаль с барельефом Серпинского по случаю 20-летия исполнения им обязанностей председателя Варшавского научного общества. В 1952—1957 гг. Серпинский был вице-президентом Польской Академии наук. В апреле 1957 г.

он принял участие в юбилейной научной сессии Академии наук СССР, посвященной 250-летию со дня рождения Л. Эйлера. В том же году он возобновил издание «Acta Arithmetica» — единственного в мире журнала, посвященного только вопросам теории чисел.

В последние 20 лет теория чисел снова занимает видное место в научной и литературной работе Серпинского. Многочисленные результаты, полученные Серпинским и его учениками, наиболее выдающимся из которых является Андрей Шинцель, заметно обогащают сокровищницу теории чисел, в особенности так называемой элементарной теории чисел.

Сейчас, как и в прошлые годы, Серпинский печатает оригинальные статьи, издает серьезные и популярные книги. Список работ, опубликованных им, содержит уже более 700 названий. Среди них свыше 30 монографий, учебников и популярных книжек.

Университеты десяти городов: Амстердама, Бордо, Вроцлава, Лакхнау (Индия), Львова, Москвы, Парижа, Праги, Софии и Тарту присвоили Серпинскому степень доктора honoris kausa. Серпинский — вице-председатель Международной Академии философии наук, почетный член Болгарской, Итальянской, Лиманской, Парижской, Румынской, Нью-Йоркской, Чехословацкой и других академий науки. Он также почетный член Лондонского математического общества и многих других научных обществ.

Вацлав Серпинский — старейший академик Польши. Он воспитал три поколения учеников, среди которых немало крупных математиков. Его непрерывная творческая деятельность на протяжении шестидесяти лет создала славу польской науке. Серпинский по праву считается отцом польской школы математиков.

И. Мельников

Элементарную теорию чисел следует считать одним из наилучших предметов для первоначального математического образования. Она требует очень мало предварительных знаний, а предмет ее понятен и близок; методы рассуждений, применяемые ею, просты, общи и немногочисленны; среди математических наук нет равной ей в обращении к естественной человеческой любознательности [1].

ПРЕДИСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКА

Теория чисел зародилась давно, еще в древней Греции, но развивалась крайне медленно. Большой и устойчивый интерес к ее проблемам в значительной мере был обусловлен деятельностью П. Ферма (1601—1665). Как самостоятельная наука теория чисел получила свое первоначальное оформление лишь в XVIII в. в многочисленных работах Л. Эйлера (1707—1783). Следующей важнейшей вехой в ее истории были исследования К. Ф. Гаусса (1777—1855) и его последователей. Большое значение для развития теории чисел имели исследования П. Л. Чебышева (1821—1894) и целой плеяды русских и советских арифметиков, принадлежащих к Петербургской математической школе или продолжающих ее славные традиции. Общеизвестно мировое значение вклада в теорию чисел И. М. Виноградова, Ю. В. Линника, Л. Г. Шнирельмана и других советских математиков. Большие заслуги в развитии теории чисел имеют и современные зарубежные математики.

В настоящее время теория чисел — обширная и трудная область математики. Она развивается в различных направлениях и использует разнообразные методы и средства.

Представляется вполне естественным, чтобы факты, принадлежащие арифметике, обосновывались «элементарными» методами, т. е. при помощи лишь арифметических и элементарноалгебраических средств. В одних случаях это требование выполняется сравнительно легко. В других же случаях поиски элементарных доказательств носят затяжной характер, и не всегда им сопутствует успех. В свое время большое удивление в математическом мире вызвали элементарные решения глубоких проблем теории чисел, найденные Артином, Ван дер Варденом, Б. А. Венковым, Ю. В. Линником, Сельбергом и др. Предложенные ими решения очень

[1] Это высказывание Г. Х. Харди (Bull. Amer. Math. Soc., 35, 1929, стр. 818) Серпинский поместил в качестве эпиграфа к своей книге «200 задач по элементарной теории чисел», изданной на польском языке.

трудны. Чтобы полностью понять и усвоить их, даже хорошо подготовленному читателю порой требуется много времени напряженного труда.

Задачи, рассматриваемые в данной книге, принадлежат элементарной теории чисел и, как правило, являются элементарными и в обычном смысле этого слова. Поэтому значительная часть книги доступна широкому кругу читателей. В книге изредка встречаются трудные задачи, из которых некоторые еще недавно рассматривались такими видными исследователями, как Серпинский, Эрдёш, Шинцель и др. Номера таких задач отмечены звездочкой.

Оригинал этой книги, появившийся в Польше в 1964 г., содержал 200 с лишним задач. В настоящее издание, кроме этих задач, вошло еще около сорока новых задач, присланных мне автором.

Эта книга не является задачником по теории чисел. Она не содержит тренировочных примеров и задач, необходимых для усвоения каких-то разделов учебной программы. Однако задачи и краткие решения, помещенные здесь, учат очень многому, так как, формируя математическое мышление, они создают известные предпосылки для самостоятельной работы в элементарной теории чисел и способствуют приобретению таких навыков, которые будут полезны в любой отрасли математики.

В настоящем издании сохранены ссылки автора на монографическую и журнальную литературу на польском и других иностранных языках. Знания, необходимые для успешной работы над отдельными задачами, читатель может почерпнуть из следующих книг по теории чисел: 1) И. М. Виноградов, Основы теории чисел, 7-е изд. М., 1965; 2) А. А. Бухштаб, Теория чисел, 2-е изд. М., 1966; 3) Ш. Х. Михелович, Теория чисел, 2-е изд. М., 1967. Читателю также будут полезны две книги В. Серпинского в русском переводе: 1) О решении уравнений в целых числах. М., 1961; 2) Что мы знаем и чего не знаем о простых числах. М., 1963.

По моей инициативе здесь помещены в качестве приложения два извлечения в русском переводе из книги В. Серпинского «Элементарная теория чисел», изданной в Варшаве в 1964 г. на английском языке. В первом извлечении дается изложение весьма элементарного доказательства постулата Бертрана, принадлежащего П. Эрдёшу, а во втором — доказательство теоремы Шерка, принадлежащее Серпинскому.

В книге имеется несколько примечаний, написанных мною. Они отмечены номерами в квадратных скобках.

Я выражаю свое уважение и признательность редактору книги Юрию Алексеевичу Гастеву, ценные указания которого были учтены мною на последнем этапе работы над рукописью этой книги.

И. Мельников

ЗАДАЧИ

I. Делимость чисел

1. Найти все натуральные числа n, для которых число n^2+1 делится на $n+1$.

2. Найти все целые числа $x \neq 3$, такие, что $x-3 \mid x^3-3$[1].

3. Доказать, что если $7 \mid a^2+b^2$, где a и b—целые числа, то $7 \mid a$ и $7 \mid b$.

4. Доказать, что существует бесконечно много натуральных чисел n, для которых число $4n^2+1$ делится одновременно на 5 и на 13.

5. Доказать, что для натуральных n имеем $169 \mid 3^{3n+3}-26n-27$.

6. Доказать, что $19 \mid 2^{2^{6k+2}}+3$ для $k=0, 1, 2, \ldots$.

7. Доказать утверждение М. Крайчика о том, что $13 \mid 2^{70}+3^{70}$.

8. Доказать, что $F_n \mid 2^{F_n}-2$, где $F_n = 2^{2^n}+1$, $n=1, 2, \ldots$.

9. Доказать, что существует бесконечное число натуральных чисел n, для которых $n \mid 2^n+1$.

10. Доказать, что если k — нечетное число, а n — натуральное, то $2^{n+2} \mid k^{2^n}-1$.

11. Доказать, что $11 \cdot 31 \cdot 61 \mid 20^{15}-1$.

12. Доказать, что для натуральных m и $a>1$ имеем[2]:

$$\left(\frac{a^m-1}{a-1},\ a-1\right) = (a-1,\ m).$$

13. Доказать, что для каждого натурального числа n число $3 \cdot (1^5+2^5+\ldots+n^5)$ делится на число $1^3+2^3+\ldots+n^3$.

14. Найти все натуральные числа $n>1$, для которых число $1^n+2^n+\ldots+(n-1)^n$ делится на n.

---

[1] Символ $a \mid b$ читается так: «a делит b» и означает, что число b делится на число a без остатка. — *Прим. перев.*

[2] Символ (a, b) означает наибольший общий делитель чисел a и b. — *Прим. перев.*

15. Исследовать, для каких натуральных n которое из двух чисел $a_n = 2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1$ и $b_n = 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1$ делится и которое не делится на 5.

16. Доказать, что для каждого натурального числа n существует такое натуральное число x, что каждый из членов бесконечной последовательности

$$x+1,\ x^x+1,\ x^{x^x}+1,\ x^{x^{x^x}}+1,\ \ldots$$

делится на n.

17. Доказать, что существует бесконечно много нечетных чисел n, для которых ни при каком четном x ни одно из чисел бесконечной последовательности

$$x^x+1,\ x^{x^x}+1,\ x^{x^{x^x}}+1,\ \ldots$$

не делится на n.

18. Доказать, что для всех натуральных n имеем $n^2 \mid (n+1)^n - 1$.

19. Доказать, что для всех натуральных n имеем $(2^n-1)^2 \mid 2^{(2^n-1)n} - 1$.

20. Доказать, что существует бесконечно много натуральных чисел n, таких, что $n \mid 2^n+1$, и найти все такие простые числа n.

21*. Найти все нечетные числа n, такие, что $n \mid 3^n + 1$.

22*. Доказать, что для каждого натурального числа $a>1$ существует бесконечно много натуральных чисел n, таких, что $n \mid a^n + 1$.

23*. Доказать, что существует бесконечно много натуральных чисел n, для которых $n \mid 2^n + 2$.

24. Найти все натуральные числа a, для которых число $a^{10}+1$ делится на 10.

25*. Доказать, что не существует натурального числа $n>1$, для которого $n \mid 2^n - 1$.

26. Найти все натуральные числа n, для которых $3 \mid n \cdot 2^n + 1$.

27. Доказать, что для каждого простого нечетного числа p существует бесконечно много натуральных чисел n, для которых $p \mid n \cdot 2^n + 1$.

28. Доказать, что для каждого натурального числа n существуют натуральные числа $x>n$ и y, такие, что $x^x \mid y^y$, но $x \nmid y$[1].

29. Доказать, что существует бесконечное число натуральных чисел n, для которых число n^2-3 делится на точный квадрат, больший единицы, и найти наименьшее из таких натуральных чисел n.

30*. Доказать, что для нечетных n имеем $n \mid 2^{n!} - 1$.

31. Доказать, что в бесконечной последовательности

$$2^n - 3 \qquad (n=2, 3, 4, \ldots)$$

существует бесконечно много членов, делящихся на 5, и бесконечно мно-

---

[1] Читается: «x не делит y». — *Прим. перев.*

го делящихся на 13, но ни один член этой последовательности не делится на $5 \cdot 13$.

32*. Найти два наименьших составных числа n, таких, что $n|2^n-2$ и $n|3^n-3$.

33*. Найти наименьшее натуральное число n, такое, что $n|2^n-2$, но $n \nmid 3^n-3$.

34. Найти наименьшее натуральное число n, такое, что $n \nmid 2^n-2$, но $n|3^n-3$.

35. Для каждого натурального числа a найти составное число n, такое, что $n|a^n-a$.

36. Доказать, что если для целых чисел a, b и c имеем $9|a^3+b^3+c^3$, то по крайней мере одно из чисел a, b, c делится на 3.

37. Доказать, что если для целых чисел a_k ($k=1, 2, 3, 4, 5$) имеем:

$$9|a_1^3+a_2^3+a_3^3+a_4^3+a_5^3,$$

то $3|a_1a_2a_3a_4a_5$.

38. Доказать, что если x, y и z — натуральные числа, $(x, y)=1$ и $x^2+y^2=z^4$, то $7|xy$, и что условие $(x, y)=1$ является здесь необходимым.

39*. Доказать, что существует бесконечно много пар натуральных чисел x, y, таких, что

$$x(x+1)|y(y+1),\ x \nmid y,\ x+1 \nmid y,\ x \nmid y+1,\ x+1 \nmid y+1,$$

и найти пару наименьших таких чисел x, y.

40. Для каждого натурального числа $s \leqslant 25$, а также для числа $s=100$ найти наименьшее натуральное число n_s, имеющее сумму цифр, равную s (в десятичной системе счисления), и делящееся на s.

41*. Доказать, что для каждого натурального числа s существует натуральное число n с суммой цифр s (в десятичной системе счисления), делящееся на s.

42*. Доказать:

а) что каждое натуральное число имеет натуральных делителей вида $4k+1$ не меньше, чем вида $4k+3$;

б) что существует бесконечно много натуральных чисел, имеющих натуральных делителей вида $4k+1$ столько же, сколько и вида $4k+3$;

в) что существует бесконечно много натуральных чисел, имеющих натуральных делителей вида $4k+1$ более, чем вида $4k+3$.

43. Доказать, что если a, b, и c — произвольные целые числа, а n — натуральное число >3, то существует целое число k, такое, что ни одно из чисел $k+a$, $k+b$ и $k+c$ не делится на n.

II. Взаимно простые числа

44. Доказать:

а) что $(n, 2^{2^n}+1)=1$, для $n=1, 2, \ldots$;

б) что существует бесконечно много натуральных чисел n, для которых $(n, 2^n-1)>1$, и найти наименьшее из них.

45. Доказать, что при всяком целом k числа $2k+1$ и $9k+4$ являются взаимно простыми, а для чисел $2k-1$ и $9k+4$ найти их наибольший общий делитель в зависимости от целого числа k.

46. Доказать: а) что существует бесконечная возрастающая последовательность попарно взаимно простых треугольных чисел (т. е. чисел $t_n=\frac{n(n+1)}{2}$, где $n=1, 2, \ldots$);

б) что существует бесконечная возрастающая последовательность попарно взаимно простых тетраэдральных чисел (т. е. чисел вида $T_n=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$, где $n=1, 2, \ldots$).

47. Доказать, что если a и b — различные целые числа, то существует бесконечно много таких натуральных чисел n, что числа $a+n$ и $b+n$ являются натуральными взаимно простыми.

48*. Доказать, что если a, b и c — различные целые числа, то существует бесконечно много натуральных чисел n, таких, что числа $a+n$, $b+n$ и $c+n$ являются попарно взаимно простыми.

49. Дать пример таких четырех различных натуральных чисел a, b, c и d, для которых не существует ни одного натурального числа n, такого, чтобы числа $a+n$, $b+n$, $c+n$ и $d+n$ были бы попарно взаимно простыми.

50. Доказать, что каждое натуральное число >6 является суммой двух взаимно простых натуральных чисел >1.

51*. Доказать, что каждое натуральное число >17 является суммой трех натуральных попарно взаимно простых чисел >1 и что число 17 этим свойством не обладает.

52*. Доказать, что каждое четное число $2k$ для каждого натурального числа m является разностью двух натуральных чисел, взаимно простых с m.

53*. Доказать, что из последовательности Фибоначчи (определяемой условиями $u_1=u_2=1$, $u_{n+2}=u_n+u_{n+1}$ для $n=1, 2, \ldots$) можно извлечь бесконечную возрастающую последовательность с попарно взаимно простыми членами.

III. Арифметические прогрессии

54. Доказать, что существуют арифметические прогрессии произвольной длины, составленные из различных попарно взаимно простых натуральных чисел.

55. Доказать, что для каждого натурального числа k множество всех натуральных чисел n, у которых число натуральных делителей кратно k, содержит бесконечную арифметическую прогрессию.

56. Доказать, что существует бесконечно много систем натуральных чисел x, y и z, для которых числа $x(x+1)$, $y(y+1)$ и $z(z+1)$ составляют возрастающую арифметическую прогрессию.

57. Найти все прямоугольные треугольники, стороны которых выражаются натуральными числами, образующими арифметическую прогрессию.

58. Найти бесконечную возрастающую арифметическую прогрессию, состоящую из натуральных чисел, имеющую наименьшую разность и не содержащую ни одного треугольного числа.

59. Найти необходимое и достаточное условие того, чтобы арифметическая прогрессия $ak+b$ ($k=0, 1, 2, \ldots$), где a и b — натуральные числа, содержала бесконечно много членов, являющихся квадратами натуральных чисел.

60*. Доказать, что существуют арифметические прогрессии произвольной длины, составленные из различных чисел, являющихся степенями натуральных чисел с натуральными показателями >1.

61. Доказать, что не существует бесконечной арифметической прогрессии, составленной из различных натуральных чисел, каждый член которой является степенью натурального числа с натуральным показателем >1.

62. Доказать, что не существует четырех последовательных натуральных чисел, каждое из которых было бы степенью натурального числа с натуральным показателем >1.

63. Доказать элементарно, что в каждой возрастающей арифметической прогрессии, членами которой являются натуральные числа, существует отрезок произвольной длины, состоящий только из составных чисел.

64*. Доказать элементарно, что если a и b — натуральные взаимно простые числа, то для каждого натурального числа m в арифметической прогрессии $ak+b$ ($k=0, 1, 2, \ldots$) существует бесконечно много членов, взаимно простых с m.

65. Доказать, что для каждого натурального числа s в каждой возрастающей арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, существуют числа, у которых первые s цифр могут быть произвольными (в десятичной системе счисления).

66. Найти все возрастающие арифметические прогрессии, состоящие из трех членов последовательности Фибоначчи (см. задачу **53**), и доказать, что не существует возрастающих арифметических последовательностей, состоящих из четырех членов последовательности Фибоначчи.

67*. Найти возрастающую арифметическую прогрессию с наименьшей разностью, состоящую из натуральных чисел и не содержащую ни одного числа последовательности Фибоначчи.

68*. Найти прогрессию $ak+b$ ($k=0, 1, 2, \ldots$), где a и b — взаимно простые натуральные числа, не содержащую ни одного числа последовательности Фибоначчи.

69. Доказать, что в каждой арифметической прогрессии $ak+b$ ($k=0, 1, 2, \ldots$), где a и b — взаимно простые натуральные числа, существует бесконечно много членов, попарно взаимно простых.

70*. Доказать, что в каждой арифметической прогрессии $ak+b$ ($k=0, 1, 2, \ldots$), где a и b — натуральные числа, существует бесконечно много членов, имеющих одинаковые простые делители.

71. Из теоремы Дирихле, согласно которой в каждой арифметической прогрессии $ak+b$ ($k=0, 1, 2, \ldots$), где a и b — натуральные взаимно простые числа, существует бесконечно много простых чисел [1], вывести следствие: в каждой такой прогрессии для каждого натурального числа s существует бесконечно много членов, являющихся произведениями s различных простых чисел.

72. Найти все арифметические прогрессии с разностью 10, состоящие из более чем двух простых чисел.

73. Найти все арифметические прогрессии с разностью 100, состоящие из более чем двух простых чисел.

74*. Найти десятичленную возрастающую арифметическую прогрессию, состоящую из простых чисел, последний член которой есть наименьшее возможное при этих условиях число.

75. Дать пример бесконечной возрастающей арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, ни один член которой не является ни суммой, ни разностью двух простых чисел.

IV. Простые и составные числа

76. Доказать, что для каждого четного числа $n>6$ существуют простые числа p и q, меньшие $n-1$, такие, что $(n-p, n-q)=1$.

77. Найти все простые числа, являющиеся одновременно суммами и разностями двух простых чисел.

78. Найти три наименьших натуральных числа n, таких, что между n и $n+10$ нет ни одного простого числа, а также три наименьших натуральных числа m, таких, что между $10m$ и $10(m+1)$ нет ни одного простого числа.

79. Доказать, что каждое простое число вида $4k+1$ является длиной гипотенузы прямоугольного треугольника, стороны которого выражаются натуральными числами.

80. Найти четыре решения уравнения $p^2+1=q^2+r^2$ в простых числах p, q, r.

81. Доказать, что уравнение

$$p^2+q^2=r^2+s^2+t^2$$

не имеет решений в простых числах p, q, r, s, t.

82*. Найти все решения в простых числах p, q и r уравнения

$$p(p+1)+q(q+1)=r(r+1).$$

83*. Найти простые числа p, q и r, для которых числа $p(p+1)$, $q(q+1)$ и $r(r+1)$ образуют возрастающую арифметическую прогрессию.

84. Найти все натуральные числа n, для которых каждое из шести чисел $n+1$, $n+3$, $n+7$, $n+9$, $n+13$ и $n+15$ является простым.

85. Найти все целые числа $k \geqslant 0$, для которых последовательность $k+1, k+2, \ldots k+10$ содержит наибольшее число простых чисел.

86. Найти все целые числа $k \geqslant 0$, для которых последовательность $k+1, k+2, \ldots k+100$ содержит наибольшее число простых чисел.

87. Найти все сотни последовательных натуральных чисел, содержащих по 25 простых чисел.

88. Найти все простые числа p, такие, что $p \mid 2^p+1$.

89. Найти все отрезки натурального ряда, состоящие из 21 числа и содержащие по 8 простых чисел.

90. Найти все числа p, для которых каждое из шести чисел p, $p+2$, $p+6$, $p+8$, $p+12$ и $p+14$ является простым.

91. Доказать, что существует бесконечно много пар различных натуральных чисел m и n, таких, что, во-первых, числа m и n имеют одни и те же простые делители и, во-вторых, числа $m+1$ и $n+1$ имеют одни и те же простые делители.

92. Найти все простые числа вида $\frac{n(n+1)}{2}-1$, где n — натуральное число.

93. Найти все простые числа вида T_n+1, где n — натуральное число, а $T_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

94. Доказать, что для каждого натурального числа s существует такое натуральное число n, что число 2^n-1 имеет не менее s различных простых делителей.

95. Найти пять простых чисел, являющихся суммами двух биквадратов натуральных чисел.

96. Доказать, что существует бесконечно много пар последовательных простых чисел, которые не являются парами простых чисел-близнецов.

97. Опираясь на теорему Дирихле об арифметической прогрессии, доказать, что существует бесконечно много простых чисел, не принадлежащих ни к одной паре простых чисел-близнецов.

98. Найти пять наименьших натуральных чисел n, для которых число n^2-1 является произведением трех различных простых чисел.

99. Найти пять наименьших натуральных чисел n, для которых число n^2+1 является произведением трех различных простых чисел, и найти такое натуральное число n, для которого число n^2+1 является произведением трех различных нечетных простых чисел.

100. Доказать:

а)* что среди каждых трех последовательных натуральных чисел >7 по крайней мере одно имеет хотя бы два различных простых делителя;

б) что из каждых 24 последовательных натуральных чисел $\geqslant 6$ по крайней мере одно имеет хотя бы три различных простых делителя.

101. Найти пять наименьших натуральных чисел n, для которых каждое из чисел n, $n+1$, $n+2$ является произведением двух различных простых чисел, и доказать, что не существует четырех последовательных натуральных чисел, каждое из которых было бы произведением двух различных простых чисел; привести пример, доказывающий существование четырех последовательных натуральных чисел, каждое из которых имеет точно два различных простых делителя.

102. Доказать, что теорема, согласно которой существует только конечное число натуральных чисел n, для которых каждое из чисел n и $n+1$ имеет только один простой делитель, равносильна теореме о том, что существует только конечное число простых чисел Мерсенна и только конечное число простых чисел Ферма.

103. Найти все числа вида 2^n-1, где n — натуральное число, не большие миллиона и являющиеся произведениями двух простых чисел, и доказать, что если n есть четное число >4, то число 2^n-1 является произведением по крайней мере трех натуральных чисел >1.

104. Используя задачу **50**, доказать, что для всех $k\geqslant 3$ имеет место неравенство $p_{k+1}+p_{k+2}\leqslant p_1p_2\ldots p_k$ (где p_k есть k-е по порядку простое число).

105. Обозначим для натуральных n через q_n наименьшее простое число, не являющееся делителем числа n. Используя задачу **104**, доказать, что отношение $\frac{q_n}{n}$ стремится к нулю, когда n неограниченно возрастает.

106. Доказать элементарно, что из теоремы Чебышева, согласно которой для натуральных $n>1$ между n и $2n$ содержится по крайней мере одно простое число [2], вытекает теорема о том, что для каждого натурального числа $n>4$ между n и $2n$ содержится хотя бы одно число, являющееся произведением двух различных простых чисел, а для натуральных $n>15$ между n и $2n$ содержится по крайней мере одно число, являющееся произведением трех различных простых чисел.

107. Доказать элементарно, что из теоремы Чебышева следует, что для каждого натурального числа s при достаточно больших натуральных n между n и $2n$ содержится по крайней мере одно число, являющееся произведением s различных простых чисел.

108. Доказать, что среди чисел бесконечной последовательности

$$1, 31, 331, 3331, \ldots$$

существует бесконечно много составных чисел, и найти наименьшее из них. (Для решения второй части этой задачи можно использовать микрофильм, содержащий все простые числа до ста миллионов: The First Six Million Prime Numbers. The Rand Corporation, Santa Monica, published by the Microcard Foundation, Madison, Wisconsin, 1959. Этот микрофильм имеется, в частности, в библиотеке Математического института Польской Академии наук).

109. Найти наименьшее натуральное число n, для которого $n^4+(n+1)^4$ есть составное число.

110. Доказать, что среди чисел 10^n+3 $(n=1, 2, \ldots)$ имеется бесконечно много составных.

111. Доказать, что для всех натуральных $n>1$ число $\frac{1}{5}(2^{4n+2}+1)$ является составным.

112. Доказать, что в последовательности 2^n-1 $(n=1, 2, \ldots)$ существует отрезок произвольной длины, состоящий только из составных чисел.

113. Доказать ошибочность утверждения о том, что из каждого натурального числа, записанного в десятичной системе счисления, можно изменив только одну его цифру, получить простое число.

114. Доказать, что теорема Чебышева $Ч$, согласно которой для натуральных $n>1$ между n и $2n$ содержится по крайней мере одно простое число[1], равносильна теореме T, о том, что для натуральных $n>1$ разложение числа $n!$ на простые сомножители содержит хотя бы один простой сомножитель в первой степени. Равносильность обеих теорем понимается в том смысле, что из каждой из них легко выводится другая.

115. Используя теорему о том, что для натуральных $n>5$ между n и $2n$ содержится по крайней мере два различных простых числа[2], доказать, что для любого натурального числа $n>10$ в разложении числа $n!$ на простые сомножители имеется хотя бы два различных простых сомножителя в первой степени.

116. Опираясь на теорему Дирихле об арифметической прогрессии, доказать, что для каждого натурального числа n существует простое

---

[1] См. следствие 1 на стр. 153 — *Прим. перев.*
[2] См. теорему 2 на стр. 152 — *Прим. перев.*

число p, такое, что каждое из чисел $p-1$ и $p+1$ имеет более чем n различных натуральных делителей.

117*. Опираясь на теорему Дирихле об арифметической прогрессии, доказать, что для каждого натурального числа n существует простое число p, такое, что каждое из чисел $p-1$, $p+1$ и $p+2$ имеет не менее чем n различных простых делителей.

118. Доказать, что если n — нечетное число >1, то числа n и $n+2$ оба являются простыми тогда и только тогда, когда число $(n-1)!$ не делится ни на n, ни на $n+2$.

119. Опираясь на теорему Дирихле об арифметической прогрессии, доказать, что для каждого натурального числа m существует простое число, сумма цифр которого в десятичной системе счисления больше чем m.

120. Опираясь на теорему Дирихле об арифметической прогрессии, доказать, что для каждого натурального числа m существует простое число, в изображении которого (в десятичной системе счисления) имеется по крайней мере m нулей.

121. Найти все простые числа p, такие, что сумма всех натуральных делителей числа p^4 является квадратом натурального числа.

122. Для каждого натурального числа s, такого, что $2 \leqslant s \leqslant 10$, найти все простые числа, у которых сумма всех натуральных делителей есть s-я степень натурального числа.

123. Доказать теорему Лиувилля о том, что для простых чисел $p>5$ при натуральном m равенство $(p-1)!+1=p^m$ невозможно.

124. Доказать, что существует бесконечно много простых чисел q, таких, что при некотором натуральном $n<q$ $q|(n-1)!+1$.

125*. Доказать, что для каждого целого числа $k\neq 1$ существует бесконечно много натуральных чисел n, для которых число $2^{2^n}+k$ является составным.

126. Доказать, что существует бесконечно много нечетных чисел $k>0$, для которых все числа $2^{2^n}+k$ $(n=1, 2, \ldots)$ являются составными.

127. Доказать, что все числа $2^{2^{2n+1}}+3$, $2^{2^{4n+1}}+7$, $2^{2^{6n+2}}+13$, $2^{2^{10n+1}}+19$ и $2^{2^{6n+2}}+21$, где $n=1, 2, \ldots$, являются составными.

128*. Доказать, что существует бесконечно много таких натуральных чисел k, что все числа $k\cdot 2^n+1$, где $n=1, 2, \ldots$, являются составными.

129*. Опираясь на решение задачи **128**, доказать теорему Эрдёша о том, что существует бесконечно много натуральных нечетных чисел k, для которых каждое из чисел 2^n+k при $n=1, 2, \ldots$ является составным.

130. Доказать, что если k — степень числа 2 с натуральным показателем, то для достаточно больших n все числа $k\cdot 2^{2^n}+1$ являются составными.

131. Для каждого натурального числа $k\leqslant 10$ найти наименьшее натуральное число n, для которого $k\cdot 2^{2^n}+1$ есть число составное.

132. Найти все натуральные числа $k<10$, для которых каждое из чисел $k\cdot 2^{2^n}+1$, где $n=1, 2, \ldots$, есть число составное.

133. Доказать, что для натуральных $n>1$ все числа $\frac{1}{3}(2^{2^n+1}+2^{2^n}+1)$ являются составными.

134. Доказать, что среди чисел $(2^{2n}+1)^2+2^2$, где $n=1, 2, \ldots$, имеется бесконечно много составных.

135*. Доказать, что для каждого натурального числа a, такого, что $1<a\leqslant 100$, существует по крайней мере одно натуральное число $n\leqslant 6$, для которого число $a^{2^n}+1$ является составным.

136. Доказать элементарно, что существует бесконечно много нечетных чисел, являющихся суммами трех различных простых чисел, но не являющихся суммами менее чем трех простых чисел.

137. Доказать, что не существует многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами, такого, что $f(1)=2$, $f(2)=3$, $f(3)=5$, но что для каждого натурального числа $m>1$ существует многочлен $f(x)$ с рациональными коэффициентами, такой, что $f(k)=p_k$ для $k=1, 2, \ldots, m$, где p_k—k-е по порядку простое число.

138*. Из частного случая теоремы Дирихле — для каждого натурального числа m в арифметической прогрессии $mk+1$ $(k=1, 2, \ldots)$ существует бесконечно много простых чисел[1] — вывести следствие, что для каждого натурального числа n существует многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами, такой, что $f(1)<f(2)<\ldots<f(n)$, причем все эти значения — простые числа.

139. Дать пример приводимого многочлена $f(x)$ (с целыми коэффициентами), который для m различных натуральных значений x дает m различных простых чисел.

140. Доказать, что если $f(x)$ — многочлен степени >0 с целыми коэффициентами, то сравнение $f(x)\equiv 0 \pmod p$ разрешимо для бесконечного числа простых p.

141. Доказать, что при натуральном n условие, чтобы число 2^n+1 было простым, не является ни необходимым, ни достаточным для того, чтобы число $2^{2^n}+1$ было простым (вопреки тому, что пишет Варколье: H. Varcollier. Nombres premiers, nombres avant-premiers, Presses Universitaires de France, 1965, стр. 15).

---

[1] Элементарное доказательство этой теоремы дал А. Роткевич. См.: «L'Enseignement Mathématique», VII, 1961, стр. 277—279.

V. Диофантовы уравнения

142. Доказать элементарно, что уравнение $3x^2-7y^2+1=0$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах x и y.

143. Найти все решения в целых числах x, y уравнения

$$2x^3+xy-7=0$$

и доказать, что оно имеет бесконечно много решений в рациональных положительных числах x и y.

144. Доказать, что для каждой системы двух натуральных чисел m и n существует линейное уравнение $ax+by=c$, где a, b и c — целые числа, имеющее в натуральных числах x и y только одно решение: $x=m$, $y=n$.

145. Доказать, что для каждого натурального числа m существует линейное уравнение $ax+by=c$, где a, b, c — целые числа, имеющее точно m решений в натуральных числах x, y.

146. Доказать, что уравнение $x^2+y^2+2xy-mx-my-m-1=0$, где m — данное натуральное число, имеет точно m решений в натуральных числах x, y.

147. Доказать элементарно, что уравнение

$$(x-1)^2+(x+1)^2=y^2+1$$

имеет бесконечно много решений в натуральных числах x, y.

148. Найти все решения уравнения

$$x^3+(x+1)^3+(x+2)^3=(x+3)^3$$

в целых числах x.

149. Доказать, что для каждого натурального числа n уравнение

$$(x+1)^3+(x+2)^3+\ \ldots\ +(x+n)^3=y^3$$

имеет решение в целых числах x и y.

150. Найти все решения уравнения

$$(x+1)^3+(x+2)^3+(x+3)^3+(x+4)^3=(x+5)^3$$

в целых числах x.

151. Найти все решения уравнения

$$(x+1)^3+(x+2)^3+(x+3)^3+(x+4)^3=(x+10)^3$$

в рациональных числах x.

152. Доказать, что уравнение

$$x(x+1)=4y(y+1)$$

не имеет решений в натуральных числах x, y, но имеет бесконечно много решений в положительных рациональных числах x, y.

153. Доказать, что для каждого заданного целого числа n уравнение $n=x^2+y^2-z^2$ имеет бесконечно много решений в целых числах x, y, z, бо́льших числа 1.

154. Найти все решения уравнения $2^m-3^n=1$ в натуральных числах m и n.

155. Найти все решения уравнения $3^n-2^m=1$ в натуральных числах m и n.

156. Доказать, что система двух уравнений $x^2+2y^2=z^2$, $2x^2+y^2=t^2$ не имеет решений в натуральных числах x, y, z, t.

157. Опираясь на тождество

$$[2(3x+2y+1)+1]^2-2(4x+3y+2)^2=(2x+1)^2-2y^2,$$

доказать, что уравнение $x^2+(x+1)^2=y^2$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах x и y.

158. Опираясь на тождество

$$[2(7y+12x+6)]^2-3[2(4y+7x+3)+1]^2=(2y)^2-3(2x+1)^2,$$

доказать элементарно, что уравнение $(x+1)^3-x^3=y^2$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах x и y.

159. Доказать, что система двух уравнений $x^2+5y^2=z^2$, $5x^2+y^2=t^2$ не имеет решений в натуральных числах x, y, z, t.

160. Доказать, что система двух уравнений $x^2+6y^2=z^2$, $6x^2+y^2=t^2$ не имеет решений в натуральных числах x, y, z, t.

161. Доказать, что система уравнений $x^2+7y^2=z^2$, $7x^2+y^2=t^2$ имеет решения в натуральных числах x, y, z, t.

162. Доказать теорему Лебега о том, что уравнение $x^2-y^3=7$ не имеет решений в натуральных числах x и y.

163. Доказать, что если c есть нечетное натуральное число, то уравнение $x^2-y^3=(2c)^3-1$ не имеет решений в целых числах x, y.

164. Решить задачу Мейснера нахождения всех решений в натуральных числах x, y, z, t системы двух уравнений $x+y=zt$, $z+t=xy$, где $x\leqslant y$, $x\leqslant z<t$. Доказать, что эта система имеет бесконечно много решений в целых числах x, y, z, t.

165. Доказать, что для натуральных n уравнение $x_1+x_2+\ldots+x_n=x_1x_2\ldots x_n$ имеет по крайней мере одно решение в натуральных числах $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

166. Для каждой заданной пары натуральных чисел a и n указать способ нахождения всех решений уравнения $x^n-y^n=a$ в натуральных числах x и y.

167*. Доказать, что если p есть простое число, n — натуральное число, то уравнение

$$x(x+1)=p^{2n}\cdot y(y+1)$$

не имеет решений в натуральных числах x, y.

168. Найти два решения в натуральных числах x и y уравнения

$$y(y+1)=x(x+1)(x+2).$$

169. Имея для данного целого числа k решение уравнения $x^2-2y^2=k$ в целых числах x, y, найти решение уравнения $t^2-2u^2=-k$ в целых числах t, u.

170. а) Доказать, что уравнение

$$x^2-Dy^2=z^2$$

для каждого целого D имеет бесконечно много решений в натуральных числах x, y, z.

б) Доказать, что уравнение $1+x^2+y^2=z^2$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах x, y, z.

171. Доказать, что уравнение

$$xy+x+y=2^{32}$$

разрешимо в натуральных числах x, y и имеет при условии $x\leqslant y$ только одно такое решение.

172. Доказать, что уравнение

$$x^2-2y^2+8z=3$$

не имеет решений в целых числах x, y, z.

173. Найти все решения в натуральных числах x и y уравнения

$$y^2-x(x+1)(x+2)(x+3)=1.$$

174. Найти все решения уравнения

$$x^2+y^2+z^2+x+y+z=1$$

в рациональных числах x, y, z.

175. Доказать теорему Эйлера: уравнение

$$4xy-x-y=z^2$$

не имеет решений в натуральных числах x, y, z [3] — и доказать, что оно имеет бесконечно много решений в целых отрицательных числах x, y, z.

176. Доказать элементарно (не обращаясь к теории уравнения Пелля), что если $D=m^2+1$, где m — натуральное число, то уравнение

$$x^2-Dy^2=1$$

имеет бесконечно много решений в натуральных числах x, y.

177*. Найти все решения уравнения

$$y^2=x^3+(x+4)^2$$

в целых числах x, y.

178. Для каждого натурального числа m найти все решения уравнения

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=m$$

в целых числах x, y, z, отличных от нуля и попарно взаимно простых.

179. Доказать, что уравнение

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=1$$

не имеет решений в натуральных числах x, y, z.

180*. Доказать, что уравнение

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=2$$

не имеет решений в натуральных числах x, y, z.

181. Найти все решения уравнения

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=3$$

в натуральных числах x, y, z.

182* Доказать, что для $m=1$ и $m=2$ уравнение

$$x^3+y^3+z^3=mxyz$$

не имеет решений в натуральных числах x, y, z, и найти все его решения в натуральных числах x, y, z для $m=3$.

183. Доказать, что теорема T_1, согласно которой не существует натуральных чисел x, y, z, для которых

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}=\frac{z}{x},$$

равносильна теореме T_2: уравнение $u^3+v^3=w^3$ не имеет решений в натуральных числах u, v, w (в том смысле, что из каждой из теорем T_1 и T_2 можно легко вывести другую).

184*. Доказать, что уравнение

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{t}+\frac{t}{x}=1$$

не имеет решений в натуральных числах x, y, z, t, но имеет бесконечно много решений в целых числах, отличных от нуля.

185*. Доказать, что уравнение

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{t}+\frac{t}{x}=m$$

не имеет решений в натуральных числах x, y, z, t для $m=2$ и $m=3$, и найти все его решения в натуральных числах x, y, z, t для $m=4$.

186. Найти все решения в натуральных числах x, y, z, t, где $x \leqslant y \leqslant z \leqslant t$, уравнения

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=1 .$$

187. Доказать, что для каждого натурального числа s уравнение

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_s}=1$$

имеет конечное >0 число решений в натуральных числах $x_1, x_2, \ldots x_s$.

188*. Доказать, что для натурального числа $s>2$ уравнение

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_s}=1$$

имеет решение в натуральных возрастающих числах $x_1, x_2, \ldots, x_s$ и что если число всех таких решений обозначить через l_s, то для $s=3, 4, \ldots$ имеет место неравенство $l_{s+1}>l_s$.

189. Доказать, что если s есть натуральное число $\neq 2$, то уравнение

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_s}=1$$

имеет решение в треугольных числах $x_1, x_2, \ldots, x_s$ (т. е. числах вида $t_n=\frac{n(n+1)}{2}$, где n — натуральное число).

190. Доказать, что для каждого натурального числа n число $\frac{1}{n}$ представимо в виде суммы n чисел, обратных различным треугольным числам.

191. Найти все решения в натуральных числах x, y, z, t уравнения

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{t^2}=1.$$

192. Найти все натуральные числа s, для которых уравнение

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\ldots+\frac{1}{x_s^2}=1$$

имеет по крайней мере одно решение в натуральных числах $x_1, x_2, \ldots, x_s$.

193. Доказать, что для каждого натурального числа $s>1$ уравнение

$$\frac{1}{x_0^2}=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\ldots+\frac{1}{x_s^2}$$

имеет решение в натуральных числах $x_0<x_1<\ldots<x_s$.

194. Доказать, что число 1 нельзя представить в виде конечной суммы чисел, обратных квадратам различных натуральных чисел, если число их больше 1.

195. Найти разложение числа $\frac{1}{2}$ в конечную сумму чисел, обратных квадратам различных натуральных чисел.

196*. Доказать, что для каждого натурального числа m при достаточно большом натуральном s уравнение

$$\frac{1}{x_1^m} + \frac{1}{x_2^m} + \ldots + \frac{1}{x_s^m} = 1$$

имеет по крайней мере одно решение в натуральных числах $x_1, x_2, \ldots, x_s$.

197. Доказать, что для каждого натурального числа s уравнение

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \ldots + \frac{1}{x_s^2} = \frac{1}{x_{s+1}^2}$$

имеет бесконечно много решений в натуральных числах $x_1, x_2, \ldots, x_s, x_{s+1}$.

198. Доказать, что для каждого натурального числа $s \geqslant 3$ уравнение

$$\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} + \ldots + \frac{1}{x_s^3} = \frac{1}{x_{s+1}^3}$$

имеет бесконечно много решений в натуральных числах $x_1, x_2, \ldots, x_s, x_{s+1}$.

199*. Найти все решения в целых числах x, y, z системы двух уравнений

$$x+y+z=3,\ x^3+y^3+z^3=3.$$

200. Исследовать элементарно, для каких натуральных чисел n уравнение

$$3x+5y=n$$

имеет по крайней мере одно решение в натуральных числах x, y, и доказать, что число таких решений возрастает неограниченно вместе с n.

201. а) Найти все решения в натуральных числах n, x, y и z уравнения

$$n^x + n^y = n^z.$$

б) Найти все решения в натуральных числах n, x, y, z и t уравнения

$$n^x + n^y + n^z = n^t.$$

в) Найти все решения в натуральных числах x, y, z и t уравнения

$$4^x + 4^y + 4^z = 4^t.$$

VI. Разные задачи

202. Доказать, что если целое число k можно представить в виде $k=x^2-2y^2$, где x и y — натуральные числа, то существует бесконечно много различных способов представления его в таком виде.

203. Доказать, что ни одно число вида $8k+3$ или вида $8k+5$, где k — целое число, не представимо в виде x^2-2y^2, где x и y — целые числа.

204. Доказать, что существует бесконечно много натуральных чисел вида $8k+1$ ($k=0, 1, 2, \ldots$), представимых в виде x^2-2y^2, где x и y — натуральные числа, а также таких, которые нельзя представить в таком виде, и найти наименьшее из последних.

205. Доказать, что последняя цифра (в десятичной системе счисления) четного совершенного числа всегда или 6, или 8.

206. Доказать теорему Аннинга, согласно которой если в числителе и в знаменателе дроби $\frac{101010101}{110010011}$, записанных в системе счисления с произвольным основанием g (где g — натуральное число, большее единицы), среднюю цифру 1 заменить любым нечетным числом следующих друг за другом единиц, то значение дроби не изменится:

$$\frac{101010101}{110010011}=\frac{10101110101}{11001110011}=\frac{1010111110101}{1100111110011}=\ldots$$

207*. Доказать, что сумма цифр числа 2^n (записанного в десятичной системе счисления) неограниченно возрастает вместе с n. (Эта задача была помещена в журнале «Matematyka», 1962, № 3 (73), стр. 187, задача 690.)

208*. Доказать, что если k — любое заданное натуральное число, больше единицы, c — любая цифра десятичной системы счисления, то существует натуральное число n, такое, что k-я от конца цифра в десятичном разложении числа 2^n есть c.

209. Доказать, что четыре последние цифры чисел 5^n ($n=1, 2, 3, \ldots$) составляют периодическую последовательность, определить период и выяснить, является ли он чистым [4].

210. Доказать, что для каждого натурального числа s первые s цифр десятичного разложения квадратного числа могут быть произвольными.

211. Доказать, что последние цифры (в десятичной системе счисления) чисел n^{n^n} ($n=1, 2, 3, \ldots$) составляют периодическую последовательность, найти период и исследовать, является ли он чистым.

212. Доказать, что в каждой бесконечной десятичной дроби существует последовательность десятичных знаков произвольной длины, которая в разложении дроби встречается бесконечно много раз.

213. а) Для каждого натурального числа k представить число 3^{2k} в виде суммы 3^k слагаемых, являющихся последовательными натуральными числами.

б) Доказать, что ни одно из чисел Ферма $F_n = 2^{2^n} + 1$, где n — натуральное число >1, не может быть представлено в виде суммы двух простых чисел.

214. Доказать, что для каждого натурального числа $s>1$ существует натуральное число m_s, такое, что для натуральных $n \geqslant m_s$ между числами n и $2n$ содержится по крайней мере одна s-я степень натурального числа, и найти наименьшие числа m_s для $s=2$ и для $s=3$.

215. Доказать, что существует последовательность произвольной длины, состоящая из последовательных натуральных чисел, ни одно из которых не является степенью натурального числа с показателем степени, большим единицы.

216. Найти выражение для n-го члена бесконечной последовательности u_n $(n=1, 2, \ldots)$, определенной условиями: $u_1=1$, $u_2=3$, $u_{n+2} = 4u_{n+1}-3u_n$ для $n = 1, 2, \ldots$.

217. Найти выражение для n-го члена бесконечной последовательности, определенной условиями: $u_1=a$, $u_2=b$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$ для $n = 1, 2, \ldots$.

218. Найти выражение для n-го члена бесконечной последовательности, определенной условиями: $u_1=a$, $u_2=b$, $u_{n+2}=-(u_n+2u_{n+1})$ для $n=1, 2, \ldots$ Исследовать частные случаи: $a=1$, $b=-1$ и $a=1$, $b=-2$.

219. Найти выражение для n-го члена бесконечной последовательности, определенной условиями: $u_1=a$, $u_2=b$, $u_{n+2} = 2u_n + u_{n+1}$.

220. Найти все целые числа $a \neq 0$, обладающие свойством $a^{a^n} = a$ для $n=1, 2, 3, \ldots$.

221*. Указать способ получения всех пар натуральных чисел, сумма и произведение которых являются квадратами натуральных чисел. Определить все такие пары чисел $\leqslant 100$.

222. Найти все члены последовательности Фибоначчи $\leqslant 10000$, являющиеся квадратами (кубами) натуральных чисел.

223*. Доказать теорему Хогатта, согласно которой каждое натуральное число представимо в виде суммы различных членов последовательности Фибоначчи.

224. Доказать, что для членов u_n последовательности Фибоначчи при $n=2, 3, \ldots$ имеет место соотношение $u_n^2 = u_{n-1} \cdot u_{n+1} + (-1)^{n-1}$.

225. Доказать, что каждое целое число может быть представлено в виде суммы пяти кубов целых чисел бесконечным числом способов.

226. Доказать, что число 3 может быть представлено в виде суммы четырех кубов целых чисел, отличных от нуля и единицы, бесконечным числом способов.

227. Доказать элементарно, что существует бесконечно много натуральных чисел, которые разлагаются в сумму четырех квадратов различных натуральных чисел по крайней мере двумя различными способами; та же задача по отношению к сумме четырех кубов.

228. Доказать, что для всех натуральных m в каждом разложении числа $4^m \cdot 7$ на сумму четырех квадратов целых неотрицательных чисел каждое из этих чисел $\geqslant 2^{m-1}$.

229. Найти наименьшее натуральное число >2, являющееся одновременно суммой двух квадратов натуральных чисел и суммой двух кубов натуральных чисел, и доказать, что существует бесконечно много натуральных чисел, разлагаемых одновременно и в сумму двух квадратов, и в сумму двух кубов натуральных взаимно простых чисел.

230. Доказать, что для каждого натурального числа s существует натуральное число $n>2$, являющееся для $k=1, 2, \ldots, s$ суммой двух k-х степеней натуральных чисел.

231*. Доказать, что существует бесконечно много натуральных чисел, не являющихся суммами двух кубов целых чисел, но являющихся суммами двух кубов рациональных положительных чисел.

232*. Доказать, что существует бесконечно много натуральных чисел, являющихся разностями двух кубов натуральных чисел, но не являющихся суммами двух кубов натуральных чисел.

233*. Доказать, что для каждого натурального числа $k>1$, $k \neq 3$, существует бесконечно много натуральных чисел, которые являются разностями двух k-х степеней натуральных чисел, но не являются суммами двух k-х степеней натуральных чисел.

234. Найти наменьшее натуральное число $n>1$, для которого сумма квадратов последовательных натуральных чисел от 1 до n была бы квадратом натурального числа.

235. а) Назовем правильной степенью каждое число вида a^b, где a и b — натуральные числа >1. Найти все натуральные числа, являющиеся суммами конечного ($\geqslant 1$) числа правильных степеней.

б) Доказать, что каждое натуральное число $\leqslant 10$, отличное от числа 6, является разностью двух правильных степеней.

236. Доказать, что для каждого прямоугольного треугольника, стороны которого выражаются натуральными числами, и для каждого натурального числа n существует такой подобный треугольник, каждая сторона которого выражается степенью натурального числа с натуральным показателем $\geqslant n$.

237. Найти все натуральные числа $n>1$, для которых $(n-1)!+1=n^2$.

238. Доказать, что произведение двух последовательных треугольных чисел не может быть квадратом, но для каждого треугольного числа $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$ существует бесконечно много бо́льших него треугольных чисел t_m, таких, что число $t_n \cdot t_m$ является квадратом.

239. Доказать (не пользуясь таблицей логарифмов), что число $F_{1945}=2^{2^{1945}}+1$ имеет более чем 10^{582} цифр, и найти число цифр числа $5\cdot 2^{1947}+1$ (которое, как известно, является наименьшим простым делителем числа F_{1945}).

240. Подсчитать, сколько цифр имеет запись числа $2^{11213}-1$ в десятичной системе счисления (это самое большое простое число, известное в настоящее время).

241. Подсчитать, сколько цифр имеет запись числа $2^{11212}(2^{11213}-1)$ в десятичной системе счисления (это самое большое совершенное число, известное в настоящее время).

242. Доказать, что число 3!!! в десятичной системе счисления имеет более тысячи цифр, и подсчитать, сколькими нулями оно оканчивается.

243*. Исследовать, для каких натуральных $m>1$ существует многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами, который при делении на m при одних целых значениях x дает в остатке 0, а при всех других целых x дает в остатке 1.

244. Найти разложение в цепную дробь числа $\sqrt{D}$, где

$$D=[(4m^2+1)n+m]^2+4mn+1,$$

m и n — натуральные числа.

245. Найти все натуральные числа $n<30$, для которых $\varphi(n)=d(n)$, где $\varphi(n)$ — функция Эйлера, а $d(n)$ — число натуральных делителей числа n.

246. Доказать, что для каждого натурального числа g можно каждое рациональное число $w>1$ представить в виде

$$w=\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k+1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k+s}\right),$$

где k — натуральное число $>g$, а s — целое неотрицательное число.

247*. Доказать теорему Эрдёша и Шураньи, согласно которой каждое целое число k можно бесконечным числом способов представить в виде $k=\pm 1^2\pm 2^2\pm\ \ldots\ \pm m^2$, где m — некоторое натуральное число, а знаки «$\pm$» выбираются соответствующим образом.

248. а) Если $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами и уравнение $f(x)=0$ имеет целый корень, то сравнение $f(x)\equiv 0 \pmod p$ имеет, очевидно, решение для каждого простого модуля p. Доказать на примере уравнения первой степени $ax+b=0$, что обратная теорема неверна.

б) Доказать, что если при целых a и b сравнение $ax+b\equiv 0 \pmod m$ разрешимо для каждого натурального модуля m, то уравнение $ax+b=0$ имеет решение в целых числах.

249. Доказать, что сравнение $6x^2+5x+1\equiv 0 \pmod m$ имеет решение для каждого натурального модуля m, несмотря на то что уравнение $6x^2+5x+1=0$ не имеет решений в целых числах.

250. а) Доказать теорему Ферма: если p — простое число, то каждый $\neq 3$ простой делитель числа 2^p+1 имеет форму $2kp+1$, где k — натуральное число.

б) Доказать, что существует бесконечное множество натуральных чисел, являющихся суммами двух треугольных чисел (т. е. чисел вида $t_n=\frac{n(n+1)}{2}$, где $n=1, 2, \ldots$), а также суммами двух квадратов натуральных чисел.

в) Доказать, что существует бесконечное множество натуральных чисел, которые являются суммами двух треугольных чисел, но которые не являются суммами двух квадратов натуральных чисел.

г) Доказать, что существует бесконечное множество натуральных чисел, которые являются суммами двух квадратов натуральных чисел, но не являются суммами двух треугольных чисел.

д) Доказать, что существует бесконечное множество натуральных чисел, которые не являются ни суммами двух треугольных чисел, ни суммами двух квадратов.

е) Найти все решения в натуральных числах x и y уравнения

$$x^2+(x+1)^2=y^4.$$

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

I. Делимость чисел

1. Существует только одно такое натуральное число $n=1$. Действительно, так как $n^2+1=n(n+1)-(n-1)$, то из предположения $n+1 \mid n^2+1$ следует, что $n+1 \mid n-1$, а последнее для натуральных n возможно лишь тогда, когда $n-1=0$, т. е. когда $n=1$.

2. Пусть $x-3=t$ есть целое число $\neq 0$,такое, что $t \mid (t+3)^3-3$. Это условие равносильно утверждению, что $t \mid 3^3-3$ или $t \mid 24$. Таким образом, необходимо и достаточно, чтобы t было целочисленным делителем числа 24, т. е. одним из чисел ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 8, ± 12, ± 24. Отсюда для $x=t+3$ получаем следующие значения: -21, -9, -5, -3, -1, 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 15 и 27.

3. Квадрат целого числа, не делящегося на 7, дает при делении на 7 в остатке 1, 2 или 4. Поэтому сумма двух таких квадратов дает в остатке 1, 2, 3, 4, 5 или 6. Следовательно, если a и b такие целые числа, что $7 \mid a^2+b^2$, то одно из них, а значит, и другое будет кратно 7.

4. Такими являются, например, все натуральные числа n, составляющие арифметическую прогрессию $65k+56$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$; действительно, если $n=65k+56$, где k — целое число $\geqslant 0$, то $n\equiv 1 \pmod 5$ и $n\equiv 4 \pmod{13}$, откуда $4n^2+1\equiv 0 \pmod 5$ и $4n^2+1\equiv 0 \pmod{13}$, так что $5 \mid 4n^2+1$ и $13 \mid 4n^2+1$.

5. Доказательство проводим при помощи математической индукции. Имеем $169 \mid 3^6-26-27=676=4\cdot 169$. Далее имеем $3^{3(n+1)+3}-26(n+1)-27-(3^{3n+3}-26n-27)=26(3^{3n+3}-1)$. Но $13 \mid 3^3-1$, откуда $13 \mid 3^{3(n+1)}-1$, следовательно, $169 \mid 26(3^{3n+3}-1)$. Отсюда тотчас же вытекает доказательство посредством индукции по n.

6. Так как $2^6=64\equiv 1 \pmod 9$, то для $k=0, 1, 2, \ldots$ имеем $2^{6k}\equiv 1 \pmod 9$ и, значит, $2^{6k+2}\equiv 2^2 \pmod 9$, откуда, учитывая, что обе части сравнения — четные числа, получаем $2^{6k+2}\equiv 2^2 \pmod{18}$. Итак, $2^{6k+2}=18t+2^2$, где t — целое число $\geqslant 0$. Но согласно малой теореме Ферма

$2^{18}\equiv 1 \pmod{19}$, откуда $2^{18t}\equiv 1 \pmod{19}$, для $t=0, 1, 2, \ldots$ и, следовательно, $2^{2^{6k+2}}\equiv 2^{18t+4}\equiv 2^4 \pmod{19}$, откуда $2^{2^{6k+2}}+3\equiv 2^4+3\equiv 0 \pmod{19}$, ч. и т. д.

7. На основании малой теоремы Ферма $2^{12}\equiv 1 \pmod{13}$, откуда $2^{60}\equiv 1 \pmod{13}$, а так как $2^5\equiv 6 \pmod{13}$ и, значит, $2^{10}\equiv -3 \pmod{13}$, то находим, что $2^{70}\equiv -3 \pmod{13}$. С другой стороны, $3^3\equiv 1 \pmod{13}$; следовательно, $3^{69}\equiv 1 \pmod{13}$, откуда $3^{70}\equiv 3 \pmod{13}$. Таким образом, $2^{70}+3^{70}\equiv 0 \pmod{13}$, или $13\mid 2^{70}+3^{70}$, ч. и т. д.

8. При помощи метода математической индукции можно легко доказать, что для натуральных n имеем $2^n\geqslant n+1$, откуда следует, что $2^{n+1}\mid 2^{2^n}$ и поэтому $2^{2^{n+1}}-1\mid 2^{2^{2^n}}-1$. Следовательно, $F_n=2^{2^n}+1\mid 2^{2^{n+1}}-1\mid 2^{2^{2^n}}-1\mid 2^{2^{2^n}+1}-2=2^{F_n}-2$, откуда $F_n\mid 2^{F_n}-2$, ч. и т. д.

Примечание. Т. Банахевич придерживался мнения, что Ферма, исходя из установленной делимости $F_n\mid 2^{F_n}-2$, сделал свое предположение о простоте всех чисел F_n ($n=1, 2, \ldots$). Во времена Ферма считалась правильной китайская теорема, согласно которой всякое натуральное число $m>1$, удовлетворяющее условию $m\mid 2^m-2$, есть простое. Это действительно верно для нескольких сотен первых натуральных чисел. Но эта теорема оказывается неправильной уже для числа $m=341=11\cdot 31$, о чем тогда еще не было известно [5].

9. Таковы, например, все числа 3^k, где $k=1, 2, \ldots$. Это можно доказать при помощи метода математической индукции, используя следующее разложение на множители: $2^{3^{k+1}}+1=(2^{3^k}+1)(2^{2\cdot 3^k}-2^{3^k}+1)$, где второй сомножитель, равный $4^{3^k}+2-(2^{3^k}+1)$, делится на 3 (так как 4^{3^k} при делении на 3 дает в остатке 1 и по предположению $3^k\mid 2^{3^k}+1$).

10. Это справедливо для $n=1$, так как квадрат нечетного числа при делении на 8 дает в остатке 1. Предположим, что при нечетном k для некоторого натурального n имеем $2^{n+2}\mid k^{2^n}-1$. Тогда $k^{2^n}=2^{n+2}t+1$, где t — целое число, и, значит, $k^{2^{n+1}}=(2^{n+2}t+1)^2=2^{2n+4}t^2+2^{n+3}t+1=2^{n+3}(2^{n+1}t^2+t)+1$, откуда $2^{n+3}\mid k^{2^{n+1}}-1$. Доказательство получается при помощи математической индукции.

11. Очевидно, достаточно доказать, что каждое из простых чисел 11, 31, и 61 делит число $20^{15}-1$. Имеем $2^5\equiv -1 \pmod{11}$ и $10\equiv -1 \pmod{11}$, откуда $10^5\equiv -1 \pmod{11}$ и, значит, $20^5\equiv 1 \pmod{11}$, $20^{15}\equiv 1 \pmod{11}$, так что $11\mid 20^{15}-1$.

Далее, $20\equiv -11 \pmod{31}$, откуда $20^2\equiv 121\equiv -3 \pmod{31}$; следовательно, $20^3\equiv(-11)(-3)\equiv 33\equiv 2 \pmod{31}$, откуда $20^{15}\equiv 2^5\equiv 1 \pmod{31}$, так что $31\mid 20^{15}-1$. Наконец, $3^4\equiv 20 \pmod{61}$, откуда по малой теореме Ферма получим $20^{15}\equiv 3^{60}\equiv 1 \pmod{61}$, так что и $61\mid 20^{15}-1$.

12. Пусть $d = \left(\frac{a^m - 1}{a - 1},\ a - 1\right)$. Опираясь на тождество

$$\frac{a^m - 1}{a - 1} = (a^{m-1} - 1) + (a^{m-2} - 1) + \ldots + (a - 1) + m \qquad (1)$$

и учитывая, что $a - 1 \mid a^k - 1$ для $k = 0,\ 1,\ 2, \ldots$, заключаем, что $d \mid m$. Если бы числа $a-1$ и m имели общий делитель $\delta > d$, то на основании (1) мы заключили бы, что $\delta \mid \frac{a^m - 1}{a - 1}$ и числа $\frac{a^m - 1}{a - 1}$ и $a - 1$ имеют общий делитель $\delta > d$, что исключено. Отсюда следует, что d есть наибольший общий делитель чисел $a - 1$ и m, ч. и т. д.

13. Как известно, для натуральных n имеет место формула

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

(которую можно легко доказать, например, при помощи математической индукции). При помощи математической индукции легко также доказать, что для натуральных n справедлива формула

$$1^5 + 2^5 + \ldots + n^5 = \frac{1}{12} n^2 (n+1)^2 (2n^2 + 2n - 1).$$

Из этих формул следует, что

$$\frac{3(1^5 + 2^5 + \ldots + n^5)}{1^3 + 2^3 + \ldots + n^3} = 2n^2 + 2n - 1,$$

откуда непосредственно вытекает свойство, о котором идет речь.

Ср. «Matematyka», 1955, № 5—6 (38), стр. 73, задача 375.

14. Искомые числа — все нечетные числа > 1. Действительно, если n — нечетное число > 1, то $\frac{n-1}{2}$ есть натуральное число и для $k = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$, как легко заметить, $n \mid k^n + (n-k)^n$ (так как $(-k)^n = -k^n$). Следовательно, $n \mid 1^n + 2^n + \ldots + (n-1)^n$.

Пусть теперь n — четное число и пусть 2^s — высшая степень двойки, делящая n (число s натуральное). Так как $s < 2^s$, то для четных k, очевидно, $2^s \mid k^n$, для нечетных же k (число которых в последовательности $1, 2, \ldots, n-1$ равно $\frac{n}{2}$) на основании теоремы Эйлера имеем $2^{k^{s-1}} \equiv 1 \pmod{2^s}$, так что и $k^n \equiv 1 \pmod{2^s}$ (ибо $2^{s-1} \mid n$), откуда $1^n + 3^n + \ldots + (n-3)^n + (n-1)^n \equiv \frac{n}{2} \pmod{2^s}$. Поэтому, учитывая, что $2^n + 4^n + \ldots + (n-2)^n \equiv 0 \pmod{2^s}$, имеем $1^n + 2^n + \ldots + (n-1)^n \equiv \frac{n}{2} \pmod{2^s}$.

Если теперь предположить, что $n \mid 1^n + 2^n + \ldots + (n-1)^n$, то, так как $2^s \mid n$, мы получим сравнение $0 \equiv \frac{n}{2} \pmod{2^s}$, из которого следует $2^s \mid \frac{n}{2}$ и $2^{s+1} \mid n$, что противоречит определению числа s. Итак, если n четное, то $n \nmid 1^n + 2^n + \ldots + (n-1)^n$.

Примечание. При помощи малой теоремы Ферма можно легко показать, что если n — простое число, то $n \mid 1^{n-1} + 2^{n-1} + \ldots + (n-1)^{n-1} + 1$, однако мы не знаем ни одного составного числа n, для которого указанная делимость имела бы место. Г. Джуга утверждает, что таких составных чисел, меньших 10^{1000}, нет, и высказал предположение, что их вообще не существует.

15. Рассмотрим 4 случая:

а) $n = 4k$, где k — натуральное число. Тогда
$a_n = 2^{8k+1} - 2^{4k+1} + 1 \equiv 2 - 2 + 1 \equiv 1 \pmod 5$,
$b_n = 2^{8k+1} + 2^{4k+1} + 1 \equiv 2 + 2 + 1 \equiv 0 \pmod 5$,
ибо $2^4 \equiv 1 \pmod 5$, откуда $2^{4k} \equiv 2^{8k} \equiv 1 \pmod 5$;

б) $n = 4k + 1$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$. Тогда
$a_n = 2^{8k+3} - 2^{4k+2} + 1 \equiv 8 - 4 + 1 \equiv 0 \pmod 5$;
$b_n = 2^{8k+3} + 2^{4k+2} + 1 \equiv 8 + 4 + 1 \equiv 3 \pmod 5$;

в) $n = 4k + 2$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$. Тогда
$a_n = 2^{8k+5} - 2^{4k+3} + 1 \equiv 2 - 8 + 1 \equiv 0 \pmod 5$,
$b_n = 2^{8k+5} + 2^{4k+3} + 1 \equiv 2 + 8 + 1 \equiv 1 \pmod 5$;

г) $n = 4k + 3$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$. Тогда
$a_n = 2^{8k+7} - 2^{4k+4} + 1 \equiv 8 - 1 + 1 \equiv 3 \pmod 5$,
$b_n = 2^{8k+7} + 2^{4k+4} + 1 \equiv 8 + 1 + 1 \equiv 0 \pmod 5$.

Таким образом, числа a_n делятся на 5 только для $n \equiv 1$ или $2 \pmod 4$, числа же b_n делятся на 5 только для $n \equiv 0$ или $3 \pmod 4$. Из чисел a_n и b_n всегда одно и только одно делится на 5.

16. Достаточно положить $x = 2n - 1$. Тогда, так как каждое из чисел x, x^x, x^{x^x}, ... является нечетным, найдем, что $2n = x + 1$ есть делитель каждого из чисел бесконечной последовательности $x + 1$, $x^x + 1$, $x^{x^x} + 1$, ...

17. Таковы, например, все простые числа p вида $4k+3$. Действительно, для четных x каждый из членов последовательности x, x^x, x^{x^x}, ... есть четное число. Поэтому если бы какой-нибудь член последовательности $x^x + 1$, $x^{x^x} + 1$, $x^{x^{x^x}} + 1$, ... оказался бы делящимся на p, то при некотором натуральном m мы имели бы $p \mid x^{2m} + 1$ и,

следовательно, $(x^m)^2 \equiv -1 \pmod p$, что, как известно, невозможно (так как -1 не является квадратичным вычетом простого модуля $p=4k+3$).

18. Из разложения[1]

$$(1+n)^n = 1 + \binom{n}{1} n + \binom{n}{2} n^2 + \ldots + \binom{n}{n} n^n$$

следует, что для $n>1$ (что можно предполагать, так как $1^2 | 2^1-1$) все члены, начиная с третьего, содержат сомножитель n в степени с показателем $\geqslant 2$, второй же член есть $\binom{n}{1} n = n^2$.

Таким образом, $n^2 | (1+n)^n - 1$, ч. и т. д.

19. На основании задачи 18 для натуральных m имеем:

$$m^2 | (m+1)^m - 1.$$

Поэтому при $m=2^n-1$ имеем $(m+1)^m = 2^{n(2^n-1)}$ и, значит, $(2^n-1)^2 | 2^{(2^n-1)n} - 1$, ч. и т. д.

20. Имеем $3 | 2^3+1$. Если же при некотором натуральном m $3^m | 2^{3^m} + 1$, то $2^{3^m} = 3^m \cdot k - 1$, где k — натуральное число, откуда $2^{3^{m+1}} = (3^m \cdot k - 1)^3 = 3^{3m} \cdot k^3 - 3^{2m+1} \cdot k^2 + 3^{m+1} \cdot k - 1 = 3^{m+1} \cdot t - 1$, где t — натуральное число. Следовательно, $2^{3^{m+1}} + 1 = 3^{m+1} \cdot t$, т. е. $3^{m+1} | 2^{3^{m+1}} + 1$, откуда при помощи математической индукции заключаем, что $3^m | 2^{3^m} + 1$ для $m = 1, 2 \ldots$.

Существуют, однако, и другие натуральные числа n, удовлетворяющие требованию $n | 2^n + 1$. Действительно, если при некотором натуральном n имеем $n | 2^n + 1$, то имеем также $2^n + 1 | 2^{2^n+1} + 1$, так как если $2^n + 1 = k \cdot n$, где k — натуральное число, очевидно, нечетное, то $2^n + 1 | 2^{kn} + 1 = 2^{2^n+1} + 1$. Так, из того, что $9 | 2^9 + 1$ следует, что $513 | 2^{513} + 1$.

Предположим теперь, что n есть простое число и $n | 2^n + 1$. Тогда $n | 2^n - 2$, что вытекает из малой теоремы Ферма, и, следовательно, $n | 3$. Отсюда $n = 3$, так как n — простое число. Итак, $3 | 2^3 + 1$. Следовательно, существует лишь одно простое число n, такое, что $n | 2^n + 1$, именно $n = 3$.

---

[1] Здесь символ $\binom{n}{k}$ — иное обозначение биномиального коэффициента C_n^k. Вообще же этот символ употребляется в более широком смысле, а именно, $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \ldots k}$, где k — целое положительное число, а n — вещественное. Иногда применяют и символ $\binom{n}{0}$, полагая его равным единице. — *Прим. перев.*

21*. Существует только одно такое нечетное число $n=1$. Действительно, предположим, что n есть нечетное число >1 и что $n|3^n+1$, и пусть p — наименьший простой делитель числа n. Очевидно, p отлично от 2 и 3 и поэтому $p>3$. Пусть δ — показатель, которому принадлежит число 3 по модулю p. Тогда имеем $p|3^\delta-1$ и, так как $p>3$, $p|3^{p-1}-1$, и $p|3^{2n}-1$, заключаем, что $\delta|p-1$ и $\delta|2n$. Если δ есть нечетное число, то $\delta|n$, откуда, так как $\delta<p$, а p — наименьший простой делитель числа n, следует, что $\delta=1$ и, значит, $p|3^1-1$, что исключено, так как $p>3$. Таким образом, δ есть четное число, $\delta=2k$, и так как $\delta|2n$, то $k|n$ и, следовательно, k есть нечетное число. Предположение, что $k=1$ дает $\delta=2$, так что $p|3^2-1$, откуда $p=2$, что исключено. Таким образом, $k>1$ и $k<\delta<p$, что невозможно, так как $k|n$, а p есть наименьший простой делитель числа n.

Примечание. Эта по существу часть задачи 430 из швейцарского журнала „Elemente der Mathematik" (т. 18, 1963, стр. 89). Решая ее, О. Ройттер дал доказательство более следующей общей теоремы (см. там же, стр. 89—90).

Если a есть такое натуральное число, что $a+1$ не является степенью двойки (т. е. $a\neq 1, 3, 7, 15, 31, \ldots$), то существует бесконечное число натуральных чисел n, удовлетворяющих условию $n|a^n+1$.

Вот доказательство этой теоремы (несколько отличное от доказательства Ройттера).

Поскольку число $a+1$ не является степенью двойки, оно должно иметь простой делитель $p>2$. Итак, $p|a+1$. Докажем теперь следующую лемму.

Лемма. Если при некотором целом $k\geqslant 0$

$$p^{k+1} \mid a^{p^k}+1,$$

где a — натуральное число >1, p — нечетное простое число, то $p^{k+2} \mid a^{p^{k+1}}+1$.

Доказательство. Предположим, что при некотором целом $k\geqslant 0$ $p^{k+1}|a^{p^k}+1$. Полагая $a^{p^k}=b$, найдем, что $p^{k+1}|b+1$, откуда $b\equiv -1 \pmod{p^{k+1}}$. Так как число p нечетное, то

$$a^{p^{k+1}}+1=b^p+1=(b+1)(b^{p-1}-b^{p-2}+\ldots-b+1) \quad (*)$$

и так как $b\equiv -1 \pmod{p^{k+1}}$ и тем более $b\equiv -1 \pmod{p}$, то $b^{2l}\equiv 1 \pmod{p}$ и $b^{2l-1}\equiv -1 \pmod{p}$ для $l=1, 2, \ldots$, откуда $b^{p-1}-b^{p-2}+\ldots-b+1\equiv 1+1+\ldots+1=p\equiv 0 \pmod{p}$. Итак, второй сомножитель правой части формулы (*) делится на p, а так как первый сомножитель делится на p^{k+1}, то $p^{k+2}|a^{p^{k+1}}+1$, ч. и т. д.

Используя доказанную лемму, при помощи математической индукции устанавливаем, что если $p|a+1$, то $p^{k+1}|a^{p^k}+1$ и поэтому

тем более, $p^k|a^{p^k}+1$ для $k=1, 2, \ldots$. Таким образом, существует бесконечно много натуральных чисел n, для которых $n|a^n+1$.

22*. Согласно теореме Ройттера, доказанной в примечании к предыдущей задаче, достаточно доказать, что для каждого нечетного числа $a>1$ существует бесконечное число натуральных чисел n, таких, что $n|a^n+1$. Одно из них, очевидно, есть число 2, так как в силу нечетности a имеем $2|a^2+1$, причем a^2, как известно, есть число вида $8k+1$ и, значит, $a^2+1=8k+2=2(4k+1)$ является удвоенным нечетным числом. Докажем теперь следующую лемму.

Лемма. Если a — нечетное число >1, s и a^s+1 являются удвоенными нечетными числами и $s|a^s+1$, то существует натуральное число $s_1>s$, такое, что s_1 и $a^{s_1}+1$ являются удвоенными нечетными числами и $s_1|a^{s_1}+1$.

Доказательство. Поскольку $s|a^s+1$, причем s и a^s+1 являются удвоенными нечетными числами, то $a^s+1=ms$, где m — нечетное число. Отсюда $a^s+1|a^{ms}+1$, или $a^s+1|a^{a^s+1}+1$, причем, так как a^s+1 есть четное число, то $a^{a^s+1}+1$ есть удвоенное нечетное число.

Итак, для $s_1=a^s+1$ имеем $s_1|a^{s_1}+1$, причем s_1 и $a^{s_1}+1$ являются удвоенными нечетными числами и (так как $a>1$) $s_1=a^s+$ $+1>s$.

Лемма доказана. Если теперь мы примем $s=2$, то в силу нечетности числа a условие леммы будет выполнено и тем самым будет установлено существование бесконечного числа натуральных чисел n, для которых $n|a^n+1$.

23*. Докажем, что если n — четное число, такое, что $n|2^n+2$ и $n-1|2^n+1$ (что справедливо, например, для $n=2$), то и для числа $n_1=2^n+2$ также имеем $n_1|2^{n_1}+2$ и $n_1-1|2^{n_1}+1$.

Действительно, если $n|2^n+2$ и число n четное, то $2^n+2=nk$, где k — нечетное число, и, следовательно, $2^n+1|2^{nk}+1=2^{2^n+2}+1$, так что для $n_1=2^n+2$ имеем $n_1-1|2^{n_1}+1$. Если же $n-1|2^n+1$, то $2^n+1=(n-1)m$, где m — нечетное число, и $2^{n-1}+1|2^{(n-1)m}+1=$ $=2^{2^n+1}+1$, откуда $2^n+2|2^{2^n+2}+2$, или $n_1|2^{n_1}+2$.

Так как $n_1=2^n+2>n$, то существует бесконечное множество четных чисел n, удовлетворяющих нашему условию. Исходя из значения $n=2$, мы получим указанным способом последовательно числа 2, 6, 66, $2^{66}+2$, ... Однако этим путем, как заметил Биндшедлер, нельзя получить все натуральные числа n, для которых $n|2^n+2$. Так, например, $946|2^{946}+2$, ибо $946=2\cdot11\cdot43$ и $11|2^5+$ $+1|2^{5\cdot189}+1=2^{945}+1$, откуда $11|2^{946}+2$, и $2^7=128=3\cdot43-1$, откуда $43|2^7+1$ и, так как $945=7\cdot135$, также $43|2^{7\cdot135}+1=2^{945}+$

$+1|2^{946}+2$. Ср. с решением Биндшедлера моей задачи № 430, помещенном в журнале “Elemente der Mathematik“ (т. 18, 1963, стр. 90).

24. Если a — натуральное число, r — остаток от деления числа a на 10, то $a^{10}+1$ делится на 10 тогда и только тогда, когда число $r^{10}+1$ делится на 10. Таким образом, вместо r мы должны брать только числа 0, 1, . . . , 9, для которых, как легко убеждаемся, только числа $3^{10}+1$ и $7^{10}+1$ делятся на 10. Таким образом, все натуральные числа a, для которых число $a^{10}+1$ делится на 10, суть натуральные числа вида $10k+3$ и $10k+7$, где $k=0, 1, 2, \ldots$.

25*. Доказательство А. Шинцеля. Предположим, что $n>1$ и $n|2^n-1$. Пусть p — наименьший простой делитель числа n и δ — показатель, которому принадлежит число 2 по модулю p. Тогда $p|2^\delta-1$, $p|2^{p-1}-1$ (так как $p|n|2^n-1$ и, значит, есть число нечетное), $p|2^n-1$, так что $\delta|p-1$ и $\delta|n$ и, следовательно, $\delta<p$. Но $\delta>1$, так как нельзя допустить, что $p|2^1-1=1$. Следовательно, число n имеет делитель >1 и $<p$, а значит, также и простой делитель с этим свойством, что находится в противоречии с определением числа p.

26. Очевидно, число n не может быть кратным 3. Если n при делении на 3 дает в остатке 1, то число 2^n+1 должно быть кратно 3, а значит, число n должно быть нечетным, т. е. n должно быть числом вида $6k+1$, где k — целое число $\geqslant 0$. Если же n при делении на 3 дает в остатке 2, то число $2\cdot 2^n+1$ должно делиться на 3 и, следовательно, n должно быть четным, т. е. быть числом вида $6k+2$, где $k=0, 1, 2, \ldots$. Таким образом, все натуральные числа n, для которых $3|n\cdot 2^n+1$, суть числа $n=6k+1$ и $n=6k+2$, где $k=0, 1, 2, \ldots$.

Ср. «Matematyka», № 5 (49), 1947, стр. 65, задача 516.

27. Если p есть простое нечетное число и

$$n=(p-1)\cdot(k\cdot p+1),$$

где $k=0, 1, 2, \ldots$, то $n\equiv -1 \pmod p$ и $p-1|n$, откуда, согласно малой теореме Ферма, $2^n\equiv 1 \pmod p$ и, следовательно, $n\cdot 2^n+1\equiv 0 \pmod p$.

Примечание. Из этой задачи вытекает, что существует бесконечное число составных чисел вида $n\cdot 2^n+1$, где n — натуральное число. Числа этого вида называют числами Каллена.

Доказано, что все эти числа для $1<n<141$ являются составными, но для $n=141$ число $n\cdot 2^n+1$ простое. Мы не знаем, имеется ли среди чисел Каллена бесконечное число простых.

28. Пусть n — данное натуральное число, k — натуральное число, большее единицы и такое, что $2^k>n$, и p — простое число $>2^{k-1}\cdot k$. Так как $k>1$, то для $x=2^k$, $y=2p$, очевидно, $x\nmid y$, но $x^x|y^y$, ибо $x^x=2^{k\cdot 2^k}$ и $y^y=(2p)^{2p}$, причем $2p>2^k\cdot k$. Так, например, имеем $4^4|10^{10}$, но $4\nmid 10$; $8^8|12^{12}$, но $8\nmid 12$; $9^9|21^{21}$, но $9\nmid 21$.

29. Из разложений на простые сомножители $1^2-3=-2$, $2^2-3=1$, $3^2-3=2\cdot3$, $4^2-3=13$, $5^2-3=2\cdot11$, $6^2-3=3\cdot11$, $7^2-3=2\cdot23$, $8^2-3=61$, $9^2-3=2\cdot3\cdot13$, $10^2-3=97$, $11^2-3=2\cdot59$, $12^2-3=3\cdot47$, $13^2-3=2\cdot83$, $14^2-3=193$, $15^2-3=2\cdot3\cdot37$, $16^2-3=11\cdot23$, $17^2-3=2\cdot11\cdot13$, $18^2-3=3\cdot107$, $19^2-3=2\cdot179$, $20^2-3=397$, $21^2-3=2\cdot3\cdot73$, $22^2-3=13\cdot37$, $23^2-3=2\cdot263$, $24^2-3=3\cdot191$, $25^2-3=2\cdot311$, $26^2-3=673$ и $27^2-3=2\cdot3\cdot11^2$ следует, что наименьшее натуральное число n, для которого n^2-3 делится на квадрат натурального числа, большего единицы, есть $n=27$.

Так как $11^2 | 27^2-3$, то и $11^2 | (27+121k)^2-3$ для $k=0, 1, 2, \ldots$, откуда следует, что существует бесконечно много натуральных чисел n, для которых число n^2-3 делится на квадрат натурального числа >1.

Примечание (А. Шинцеля). Можно доказать, что для каждого натурального числа m существует целое число a, такое, что ни одно из чисел 1^2+a, 2^2+a, $\ldots$, m^2+a не делится ни на один квадрат натурального числа, большего единицы. Можно также доказать, что если $f(x)$ есть многочлен с целыми коэффициентами, то существует бесконечное множество натуральных чисел x, для которых число $f(x)$ имеет квадратный делитель, больший единицы.

30*. Если n — натуральное число, то $\varphi(n) | n!$. Действительно, для $n=1$ это очевидно, если же $n>1$ и $n=q_1^{\alpha_1}\cdot q_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot q_k^{\alpha_k}$ есть разложение числа n на простые сомножители, где $q_1<q_2<\ldots<q_k$, то $\varphi(n)=q_1^{\alpha_1-1}\cdot q_2^{\alpha_2-1}\ldots q_k^{\alpha_k-1}\cdot(q_1-1)\ldots(q_k-1)$, $q_1^{\alpha_1-1}\cdot q_2^{\alpha_2-1}\ldots q_k^{\alpha_k-1} | n$, $q_k-1<q_k\leqslant n$, откуда $q_k-1<n$ и $q_1-1<q_2-2<\ldots<q_k-1$ являются различными натуральными числами, меньшими n, так что $(q_1-1)(q_2-1)\ldots(q_k-1) | (n-1)!$.

Отсюда $\varphi(n) | (n-1)!\, n=n!$.

Если n есть нечетное число, то (согласно теореме Эйлера) $n | 2^{\varphi(n)}-1 | 2^{n!}-1$, откуда $n | 2^{n!}-1$, ч. и т. д.

31. На основании малой теоремы Ферма $2^4\equiv1 \pmod 5$ и $2^{12}\equiv1 \pmod{13}$. Поэтому, учитывая, что $2^3\equiv3 \pmod 5$ и $2^4\equiv3 \pmod{13}$, будем иметь $2^{4k+3}\equiv3 \pmod 5$ и $2^{12k+4}\equiv3 \pmod{13}$ для $k=0, 1, 2, \ldots$. Таким образом, $5 | 2^{4k+3}-3$ и $13 | 2^{12k+4}-3$ для $k=0, 1, 2, \ldots$.

Так как $2^6\equiv-1 \pmod{65}$, то $2^{12}\equiv1 \pmod{65}$, откуда $2^{n+12}-3\equiv2^n-3 \pmod{65}$. Из последнего сравнения видно, что последовательность остатков от деления на 65 чисел последовательности 2^n-3 ($n=2, 3, \ldots$) является периодической с двенадцатичленным периодом[1]. Поэтому, чтобы доказать, что ни одно из чисел 2^n-3 ($n=2, 3, \ldots$) не делится на 65, достаточно подтвердить, что ни одно из чисел 2^n-3, где $n=2, 3, \ldots, 13$, не делится на 65. Как легко подсчитать, числа эти при делении на 65 дают соответственно остатки 1, 5, 13, 29, 61, 60, 58, 54, 46, 30, 63, 64, ни одно из которых не является нулем.

[1] См. примечание [4] на стр. 140. — *Прим. перев.*

32*. Как известно (см., например: W. **Sierpiński**. Teoría liczb, изд. 3. Warszawa-Wrocław, 1950, стр. 61), четырьмя наименьшими составными числами n, для которых $n \mid 2^n-2$, являются числа 341, 561, 645 и 1105. Для числа 341 имеем $341 \nmid 3^{341}-3$, так как по малой теореме Ферма $3^{30} \equiv 1 \pmod{31}$, откуда $3^{330} \equiv 1 \pmod{31}$ и, следовательно, $3^{341} \equiv 3^{11} \pmod{31}$. Далее, так как $3^3 \equiv -4 \pmod{31}$, то $3^9 \equiv -64 \equiv -2 \pmod{31}$, откуда $3^{11} \equiv -18 \pmod{31}$ и, значит, $3^{341}-3 \equiv 3^{11}-3 \equiv -21 \pmod{31}$, откуда $31 \nmid 3^{341}-3$ и тем более $341 = 11 \cdot 31 \nmid 3^{341}-3$. Однако $561 = 3 \cdot 11 \cdot 17 \mid 3^{561}-3$, так как $11 \mid 3^{10}-1$, откуда $11 \mid 3^{340}-1$ и $11 \mid 3^{341}-3$, а также $17 \mid 3^{16}-1$, откуда $17 \mid 3^{16 \cdot 35}-1 = 3^{560}-1$ и, следовательно, $17 \mid 3^{561}-3$. Итак, наименьшее составное число n, такое, что $n \mid 2^n-2$ и $n \mid 3^n-3$, есть число $n = 561$.

Число 645 не является делителем числа $3^{645}-3$. Действительно, $645 = 3 \cdot 5 \cdot 43$, $3^{42} \equiv 1 \pmod{43}$, откуда $3^{42 \cdot 15} \equiv 1 \pmod{43}$, $3^{630} \equiv 1 \pmod{43}$, откуда $3^{645} \equiv 3^{15} \pmod{43}$. Далее, $3^4 \equiv -5 \pmod{43}$, следовательно, $3^6 \equiv -45 \equiv -2 \pmod{43}$, $3^{12} \equiv 4 \pmod{43}$ и $3^{15} \equiv 108 \equiv 22 \pmod{43}$, откуда $3^{645}-3 \equiv 19 \pmod{43}$, т. е. $43 \nmid 3^{645}-3$.

Число 1105 является делителем числа $3^{1105}-3$, так как $1105 = 5 \cdot 13 \cdot 17$; $3^4 \equiv 1 \pmod{5}$, откуда $3^{1104} \equiv 1 \pmod{5}$ и $5 \mid 3^{1105}-3$, далее, $3^{12} \equiv 1 \pmod{13}$, откуда $3^{1104} \equiv 1 \pmod{13}$ и $13 \mid 3^{1105}-3$; наконец, $3^{16} \equiv 1 \pmod{17}$, откуда, так как $1104 = 16 \cdot 69$, $3^{1104} \equiv 1 \pmod{17}$ и, следовательно, $17 \mid 3^{1105}-3$.

Таким образом, двумя наименьшими составными числами n, для которых $n \mid 2^n-2$ и $n \mid 3^n-3$, являются числа 561 и 1105.

Примечание. Мы не знаем, существует ли бесконечное число составных чисел n, для которых $n \mid 2^n-2$ и $n \mid 3^n-3$. Положительный ответ на этот вопрос вытекает из одной гипотезы Шинцеля о простых числах. Для простых чисел n обе делимости имеют место согласно малой теореме Ферма.

Псевдопростыми числами мы называем составные числа n, для которых $n \mid 2^n-2$. А. Роткевич доказал (Sur les nombres pseudopremiers de la forme $ax+b$, Comptes Rendus Ac. Sc. Paris, т. 257, стр. 2601—2604), что в каждой арифметической прогрессии $ax+b$ ($x=0, 1, 2, \ldots$), где a и b — натуральные взаимно простые числа, существует бесконечное число псевдопростых чисел [6].

33*. Так как $n \nmid 3^n-3$, то на основании малой теоремы Ферма заключаем, что n должно быть составным числом. Наименьшее же составное число n, для которого $n \mid 2^n-2$, есть 341. В решении задачи 32 доказано, что $341 \nmid 3^{341}-3$. Таким образом, наименьшее натуральное число n, такое, что $n \mid 2^n-2$, но $n \nmid 3^n-3$, есть 341.

Примечание. А. Роткевич доказал, что существует бесконечное число натуральных чисел n, как четных, так и нечетных, таких, что $n \mid 2^n-2$ и $n \nmid 3^n-3$.

Можно доказать, что наименьшее натуральное число n, для которого $n \mid 2^n-2$, $n \mid 3^n-3$ и $n \nmid 5^n-5$, есть число $n = 37 \cdot 73$, а из одной гипотезы Шинцеля о простых числах

можно получить следствие, согласно которому таких чисел имеется бесконечно много. (См.: A. Rotkiewicz. Sur les nombres composés tels que $n \mid 2^n-2$ et $n \nmid 3^n-3$. Bulletin de la Soc. des math. et phys. de Serbie. XV Beograd, 1963, стр. 7—11).

34. Таковым является число $n=6$. Действительно, если $n \nmid 2^n-2$, то n должно быть составным числом. Наименьшее составное число есть 4, но $4 \nmid 3^4-3=78$. Следующее составное число есть 6, причем $6 \nmid 2^6-2=62$ и $6 \mid 3^6-3$, так как 3^6-3 есть четное число, кратное 3.

Примечание. А. Роткевич доказал, что существует бесконечно много составных чисел n, как четных, так и нечетных, таких, что $n \mid 3^n-3$ и $n \nmid 2^n-2$.

35. Если a есть составное число, то можно принять $n=a$, так как, очевидно, $a \mid a^a-a$. Если $a=1$, то можно принять $n=4$, так как $4 \mid 1^4-1$. Если a есть простое число >2, то можно принять $n=2a$, так как в этом случае число a является нечетным и четное число $a^{2a}-a$, делящееся на нечетное a и на число 2, делится на $2a$.

Остается рассмотреть случай $a=2$. Здесь можно принять $n=341=11 \cdot 31$, так как $341 \mid 2^{341}-2$, что можно легко доказать следующим образом. Имеем $11 \mid 2^{10}-1=1023$, откуда $11 \mid 2^{340}-1$ и $11 \mid 2^{341}-2$. Имеем также $31=2^5-1 \mid 2^{340}-1$, откуда $31 \mid 2^{341}-2$. Число $2^{341}-2$ делится на простые числа 11 и 31, а, значит, также на их произведение 341.

Примечание. М. Чиполла доказал (Sui numeri composti P, che verificiano la congruenza di Fermat $a^{P-1} \equiv 1 \pmod{P}$, Annali di Matematica, 9, 1904, стр. 139—160), что для каждого натурального числа a существует бесконечно много составных чисел n, таких, что $n \mid a^{n-1}-1$.

А. Шинцель доказал, что для каждого целого числа a и каждого натурального числа m существуют различные простые числа $p>m$ и $q>m$, такие, что $pq \mid a^{pq}-a$. См. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, VII, 1958, стр. 37—41.

Мы не знаем, существует ли бесконечное число составных чисел n, таких, что $n \mid a^n-a$ для каждого целого числа a. Наименьшее из таких чисел n есть число $561=3 \cdot 11 \cdot 17$. Из одной гипотезы Шинцеля о простых числах следует, что таких составных чисел n имеется бесконечно много.

Можно доказать (см. А. Роткевич, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, VIII, 1959, стр. 341—342), что для каждого натурального числа a существует бесконечно много четных n, для которых $n \mid a^n-a$, а также (см. А. Роткевич там же, стр. 115—116), что для каждого натурального $a>1$ и каждого натурального s существует бесконечно много натуральных n, являющихся произведениями s различных простых чисел, таких, что $n \mid a^n-1$.

36. Куб целого числа, не делящегося на 3, дает при делении на 9 в остатке 1 или —1. Если бы ни одно из целых чисел a, b и c не оказалось делящимся на 3, то число $a^3+b^3+c^3$ при делении на 9 давало бы остаток $\pm 1 \pm 1 \pm 1$, который ни при одной комбинации знаков не является числом, кратным 9. Значит, если $9 \mid a^3+b^3+c^3$, то $3 \mid abc$, ч. т. д.

37. Доказательство совершенно аналогично приведенному в предыдущем решении, так как число $\pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm 1$ ни при одной комбинации знаков не делится на 9.

38. Условие, что $(x, y)=1$, является необходимым, так как, например, $15^2+20^2=5^4$, однако $7 \nmid 15\cdot 20$. Если же $(x, y)=1$ и x, y, z таковы, что $x^2+y^2=z^4$, то, как известно из теории уравнения Пифагора, существуют натуральные числа m и n, такие, что, например, $x=m^2-n^2$, $y=2mn$, $z^2=m^2+n^2$.

Предположим, что $7 \nmid y$ и, значит, $7 \nmid m$ и $7 \nmid n$. Как легко подсчитать, квадрат целого числа, не делящегося на 7, дает при делении на 7 в остатке 1,2 или 4. Так как ни одна из сумм $1+2$, $1+4$ и $2+4$ не совпадает ни с одним из указанных остатков и не кратна 7, то из равенства $z^2=m^2+n^2$ следует, что числа m и n должны при делении на 7 давать одинаковые остатки, откуда следует, что $7 \mid x=m^2-n^2$.

39*. Таковы, например, числа

$$x=36k+14,\ y=(12k+5)(18k+7),$$

где $k=0, 1, 2, \ldots$. Действительно, как легко проверить, здесь $x(x+1) \mid y(y+1)$, так как $x(x+1)=2\cdot 3\cdot(12k+5)(18k+7)=6y$ и $6 \mid y+1$.

Число y не делится на x, так как x — четное число, а y — нечетное. Далее, $x+1 \nmid y$, так как $3 \mid x+1$ и $3 \nmid y$; $x \nmid y+1$, так как $18k+7 \mid x$ и $18k+7 \mid y$ и, следовательно, $18k+7 \nmid y+1$. Наконец, $x+1 \nmid y+1$, так как $12k+5 \mid x+1$ и $12k+5 \mid y$ и, следовательно, $12k+5 \nmid y+1$.

Для $k=0$ мы здесь получаем $x=14$, $y=35$. Эти числа, как можно легко доказать, составляют пару наименьших натуральных чисел, обладающих заданными свойствами.

40. Для $s<10$, очевидно, $n_s=s$. Далее, исследуя последовательные кратные числа s, легко найдем $n_{10}=190$, $n_{11}=209$, $n_{12}=48$, $n_{13}=247$, $n_{14}=266$, $n_{15}=195$, $n_{16}=448$, $n_{17}=476$, $n_{18}=198$, $n_{19}=874$, $n_{20}=9920$, $n_{21}=399$, $n_{22}=2398$, $n_{23}=1679$, $n_{24}=888$, $n_{25}=4975$.

Наконец, имеем $n_{100}=19\,999\,999\,999\,900$. Действительно, две последние цифры каждого числа, делящегося на сто, должны быть нулями, сумма же цифр каждого натурального числа, меньшего числа 199 999 999 999, как легко заметить, меньше ста.

Ср. D. R. Kaprekar. Scripta Mathematica, **21**, 1955, стр. 27.

41*. Пусть s — данное натуральное число, $s=2^\alpha\cdot 5^\beta\cdot t$, где α и β — целые неотрицательные числа, t — натуральное число, не делящееся ни на 2, ни на 5. На основании теоремы Эйлера имеем $10^{\varphi(t)}\equiv 1 \pmod t$. Пусть $n=10^{\alpha+\beta}\cdot(10^{\varphi(t)}+10^{2\varphi(t)}+\ldots+10^{s\cdot\varphi(t)})$. Число n делится на s, так как $2^\alpha\cdot 5^\beta \mid 10^{\alpha+\beta}$ и $10^{\varphi(t)}+10^{2\varphi(t)}+\ldots+10^{s\varphi(t)}\equiv s\equiv 0 \pmod t$ (ибо $t \mid s$). С другой стороны, ясно, что сумма цифр числа n (в десятичной системе счисления) составляет s.

42*. а) Теорема, очевидно, верна, если число не имеет ни одного простого делителя вида $4k+3$. Предположим, что она справедлива для всех натуральных чисел, имеющих в своем разложении на простые сомножители в первых степенях (следовательно, не обязательно различных)

$s \geqslant 0$ простых сомножителей вида $4k+3$, и пусть n — натуральное число, имеющее в своем разложении на простые сомножители (в первых степенях) $s+1$ простых сомножителей вида $4k+3$. Положим $n=mq$, где m в своем разложении на простые сомножители в первых степенях имеет s простых сомножителей вида $4k+3$, а q — простое число вида $4k+3$.

Пусть g означает число натуральных делителей числа m вида $4k+1$, а h — число натуральных делителей числа m вида $4k+3$. В силу предположения, относящегося к числу s, имеем $g \geqslant h$.

Натуральными делителями вида $4k+1$ числа mq являются, очевидно, натуральные делители вида $4k+1$ числа m, которых имеется g, и произведения числа q на каждый из натуральных делителей вида $4k+3$ числа m, которых имеется h.

Таким образом, натуральных делителей вида $4k+1$ у числа $m \cdot q$ будет $g+h$.

Натуральными делителями вида $4k+3$ числа $m \cdot q$ являются натуральные делители вида $4k+3$ числа m, которых имеется h, и произведения числа q на каждый из натуральных делителей вида $4k+1$ числа m, которых имеется g (среди этих произведений могут быть такие, которые являются делителями вида $4k+3$ числа m).

Таким образом, число всех натуральных делителей вида $4k+3$ числа $m \cdot q$ оказывается $\leqslant h+g$ (но может быть и $<h+g$).

В любом случае теорема справедлива для числа $m \cdot q$. Поэтому, применяя математическую индукцию по числу s, мы заключаем, что она справедлива для каждого натурального числа n.

б) Число 3^{2n-1} (где $n=1, 2, \ldots$) имеет натуральных делителей вида $4k+1$ (которыми являются числа $1, 3^2, 3^4, \ldots 3^{2n-2}$) столько же, сколько и натуральных делителей вида $4k+3$ (которыми являются числа $3, 3^3, 3^5, \ldots, 3^{2n-1}$).

в) Число 3^{2n} (где $n=1, 2, \ldots$) имеет $n+1$ натуральных делителей вида $4k+1$ (которыми являются числа $1, 3^2, 3^4, \ldots, 3^{2n}$) и только n натуральных делителей вида $4k+3$ (которыми являются числа $3, 3^3, \ldots, 3^{2n-1}$). Все $n+1$ делителей числа 5^n имеют вид $4k+1$, и ни один из них не имеет вид $4k+3$.

43. Обозначим через r_1, r_2 и r_3 соответственно остатки от деления целых чисел $-a$, $-b$ и $-c$ на n. Так как эти числа принадлежат последовательности $0, 1, 2, \ldots, n-1$, где $n>3$, то в указанной последовательности найдется число r, такое, что $r \neq r_1$, $r \neq r_2$ и $r \neq r_3$. Допустим, что $n \mid a+r$. Тогда, учитывая сравнение $-a \equiv r_1 \pmod{n}$, мы найдем, что $n \mid r-r_1$. Но r и r_1 являются целыми числами $\geqslant 0$ и $<n$; следовательно, если их разность делится на n, то должно быть $r=r_1$, что противоречит определению числа r. Подобным образом мы докажем, что $n \nmid b+r$ и $n \nmid c+r$. Таким образом, мы можем принять $k=r$.

II. Взаимно простые числа

44. а) Как известно, каждый >1 делитель числа $F_n = 2^{2^n}+1$ (где $n=1, 2, \ldots$) есть число вида $2^{n+2}k+1$, где k — натуральное число (см., например: W. Sierpiński: Elementary theory of numbers. Warszawa, 1964, стр. 343, теорема 5). Так как для натуральных n и k $2^{n+2}k+1 \geqslant 2^{n+2}+1 > n$, то каждый >1 делитель числа F_n есть число, большее n. Отсюда $(n, F_n)=1$, ч. и т. д.

б) Легко устанавливаем, что $(n, 2^n-1)=1$ для $n=1, 2, 3, 4, 5$ и что $(6, 2^6-1)=3$. Таким образом, наименьшее число n, о котором идет речь, есть $n=6$.

Далее, так как $3 \mid 2^6-1 \mid 2^{6k}-1$ для $k=1, 2, \ldots$, то заключаем, что $(6k, 2^{6k}-1) \geqslant 3$ для $k=1, 2, \ldots$.

45. Числа $2k+1$ и $9k+4$ являются взаимно простыми, так как $9(2k+1)-2(9k+4)=1$. Так как $9k+4=4(2k-1)+(k+8)$ и $2k-1=2(k+8)-17$, то $(9k+4; 2k-1)=(2k-1; k+8)=(k+8; 17)$. Если $k \equiv 9 \pmod{17}$, то $(k+8; 17)=17$. В противном же случае $17 \nmid k+8$ и, следовательно, $(k+8; 17)=1$. Следовательно, $(9k+4; 2k-1)=17$, если $k \equiv 9 \pmod{17}$ и $(9k+4; 2k-1)=1$, если $k \not\equiv 9 \pmod{17}$.

46. а) Покажем вначале, что если для некоторого натурального числа m имеется m треугольных чисел $a_1<a_2< \ldots <a_m$, попарно взаимно простых, то существует треугольное число $t>a_m$, такое, что $(t, a_1a_2 \cdot \ldots \cdot a_m)=1$.

Действительно, пусть $a=a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_m$; числа $a+1$ и $2a+1$ являются взаимно простыми с a. Число $a_{m+1} = t_{2a+1} = \frac{(2a+1)(2a+2)}{2} = (a+1)(2a+1)$ есть треугольное число $>a_m$, причем взаимно простое с a и, следовательно, с каждым из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Отсюда следует, что если мы имеем конечную возрастающую последовательность треугольных чисел, попарно взаимно простых, то всегда сумеем найти треугольное число, превосходящее эти числа и взаимно простое с каждым из них.

Выбирая всегда наименьшее такое треугольное число, получим бесконечную последовательность $t_1=1$, $t_2=3$, $t_4=10$, $t_{13}=91$, $t_{22}=253, \ldots$ треугольных чисел, попарно взаимно простых.

Примечание. Треугольным числам посвящена научно-популярная книга автора: "Liczby trójkatne". Warszawa, 1962, стр. 66.

б) Покажем вначале, что если для некоторого натурального числа m тетраэдральные числа $a_1<a_2< \ldots <a_m$ попарно взаимно просты, то существует такое тетраэдральное число T, что $(T, a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_m)=1$.

Действительно, пусть $a=a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_m$; число

$$T = T_{6a+1} = (6a+1)(3a+1)(2a+1)$$

взаимно просто с a, а следовательно, взаимно просто с каждым из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$, причем $T > a \geqslant a_m$.

Итак, искомую бесконечную возрастающую последовательность попарно взаимно простых тетраэдральных чисел можно получить при помощи математической индукции, если мы примем в качестве ее первого члена число $T_1 = 1$, и, имея уже (при данном натуральном m) m членов, являющихся тетраэдральными попарно взаимно простыми числами, примем за $(m+1)$-й член наименьшее тетраэдральное число, большее m-го члена нашей последовательности и взаимно простое с каждым из уже найденных m чисел. Поступая таким образом, мы получим следующую бесконечную возрастающую последовательность тетраэдральных чисел, каждые два из которых являются взаимно простыми:

$$T_1 = 1,\ T_2 = 4,\ T_5 = 35,\ T_{17} = 969,\ \ldots$$

Примечание. Различные сведения о тетраэдральных числах читатель может найти в моей книге: «Liczby trójkątne». Warszawa, 1962, стр. 53—61; там же на странице 64 приводится таблица наименьших ста тетраэдральных чисел.

47. Пусть a и b — различные целые числа, причем $a < b$, и пусть $n = (b-a)k + 1 - a$; для достаточно больших натуральных k число n будет натуральным; натуральными будут и числа $a+n = (b-a)k+1$ и $b+n = (b-a)(k+1)+1$. Если $d \mid a+n$ и $a \mid b+n$, то $d \mid a-b$ и, так как $d \mid a+n = (b-a)k+1$, то $d \mid 1$ и, следовательно, $d = 1$. Таким образом, имеем $(a+n,\ b+n) = 1$.

Ср. «Matematyka», № 4—6 (54), 1958, стр. 55, задача 487.

48*. Поскольку a, b и c — различные целые числа, то $h = (a-b)(a-c)(b-c)$ есть целое число, отличное от нуля и от ± 1. Обозначим через $q_1, q_2, \ldots, q_s$ все простые числа >3, являющиеся делителями числа h.

Если два или более из чисел a, b, c являются четными, то пусть $r = 1$, в противном же случае пусть $r = 0$. Ясно, что по крайней мере два из чисел $a+r$, $b+r$, $c+r$ будут нечетными.

Если a, b и c при делении на 3 дают различные остатки, то положим $r_0 = 0$, если же два или более из чисел a, b, c при делении на 3 дают один и тот же остаток — обозначим его ρ, — то положим $r_0 = 1 - \rho$. Ясно, что в каждом случае по крайней мере два из чисел $a+r_0$, $b+r_0$, $c+r_0$ не делятся на 3.

Пусть теперь i означает одно из чисел $1, 2, \ldots, s$. Так как $q_i > 3$, то согласно задаче 43 существует целое число r_i, такое, что ни одно из чисел $a+r_i$, $b+r_i$, $c+r_i$ не делится на q_i. На основании китайской теоремы об остатках [7] заключаем, что существует бесконечное число натуральных чисел n, таких, что $n \equiv r \pmod 2$, $n \equiv r_0 \pmod 3$ и $n \equiv r_i \pmod{q_i}$ для $i = 1, 2, \ldots, s$.

Докажем, что числа $a+n$, $b+n$, $c+n$ попарно взаимно просты. Допустим противное, например, что $(a+n,\ b+n) > 1$. Тогда найдется про-

стое число q, такое, что $q|a+n$ и $q|b+n$, откуда $q|a-b$, а значит, $q|h$ и $h \neq \pm 1$. Так как $n \equiv r \pmod 2$ и так как по крайней мере два из чисел $a+r$, $b+r$, $c+r$, как мы знаем, являются нечетными, то по крайней мере два из чисел $a+n$, $b+n$, $c+n$ также нечетные и, следовательно, $q \neq 2$. Так как $n \equiv r_0 \pmod 3$ и по крайней мере два из чисел $a+r_0$, $b+r_0$, $c+r_0$ не делятся на 3, то по крайней мере два из чисел $a+n$, $b+n$, $c+n$ также не делятся на 3 и, следовательно, $q \neq 3$. Далее, так как q является одним из простых делителей числа h, то теперь можно положить $q=q_i$, где i получает одно из значений: 1, 2, . . . , s. Но тогда, учитывая, что $n \equiv r_i \pmod{q_i}$, или $n \equiv r_i \pmod q$ и что ни одно из чисел $a+r_i$, $b+r_i$, $c+r_i$ не делится на q_i, заключаем, что ни одно из чисел $a+n$, $b+n$, $c+n$ не делится на q_i, или на q, вопреки предположению, что $q|a+n$ и $q|b+n$. Таким образом, мы доказали, что $(a+n, b+n)=1$.

Подобным образом мы докажем, что $(a+n, c+n)=1$ и что $(b+n, c+n)=1$. Итак, числа $a+n$, $b+n$, $c+n$ являются попарно взаимно простыми. Так как таких натуральных n, для которых это имеет место, существует бесконечно много, то предложенное доказательство можно считать законченным.

49. Таковы, например, числа $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=4$. Действительно, для нечетных n числа $a+n$ и $c+n$ четные и, значит, не взаимно простые, а для четных n числа $b+n$ и $d+n$ четные и, значит, не взаимно простые.

50. Если n — нечетное число >6, то $n=2+(n-2)$, причем $n-2$ — нечетное число >1 и имеем $(2, n-2)=1$.

А вот доказательство А. Монковского для четного $n>6$.

Если $n=4k$, где k — натуральное число >1 (так как $n>6$), то $n=(2k-1)+(2k+1)$, причем $2k+1>2k-1>1$ (так как $k>1$), числа же $2k-1$ и $2k+1$, будучи последовательными нечетными числами, являются взаимно простыми.

Если же $n=4k+2$, где k — натуральное число >1 (так как $n>6$), то $n=(2k+3)+(2k-1)$, причем $2k+3>2k-1>1$ (так как $k>1$). Числа же $2k+3$ и $2k-1$ являются взаимно простыми, так как в случае $0<d|2k+3$ и $d|2k-1$ было бы $d|(2k+3)-(2k-1)$, или $d|4$, а так как d — делитель нечетного числа — должно быть числом нечетным, то заключаем, что $d=1$ и $(2k+3, 2k-1)=1$.

51*. Если n — четное число >8, то $n=6k$, $n=6k+2$ или $n=6k+4$, причем в первых двух случаях k есть натуральное число >1, в третьем же случае k — натуральное число. Из формул $6k=2+3+[6(k-1)+1]$, $6k+2=3+4+[6(k-1)+1]$, $6k+4=2+3+(6k-1)$ легко вытекает, что n есть сумма трех натуральных чисел >1, попарно взаимно простых.

Пусть теперь n — нечетное число >17. Здесь возможны шесть случаев: $n=12k+1$, $12k+3$, $12k+5$, $12k+7$, $12k+9$ и $12k+11$, причем в пер-

вых трех случаях k есть натуральное число >1, в трех же остальных k — натуральное число. Имеем $12k+1=[6(k-1)-1]+[6(k-1)+5]+9$, где числа $6(k-1)-1$, $6(k-1)+5$ и 9 — большие единицы и попарно взаимно простые, так как первые два из них не делятся на 3 и являются взаимно простыми (ибо, если $d|6(k-1)-1$ и $d|6(k-1)+5$, то $d|4$, а оба числа нечетные).

Если $n=12k+3$, то $n=(6k-1)+(6k+1)+3$;
если $n=12k+5$, то $n=(6k-5)+(6k+1)+9$;
если $n=12k+7$, то $n=(6k+5)+(6k-1)+3$;
если $n=12k+9$, то $n=(6k-1)+(6k+1)+9$;
если $n=12k+11$, то $n=[6(k+1)-5]+[6(k+1)+1]+3$.

В каждом случае, как легко заметить, мы имеем три слагаемых >1, попарно взаимно простых.

Число 17 не обладает обсуждаемым свойством, так как если $17=a+b+c$, то все три числа a, b и c (как числа, бо́льшие единицы и попарно взаимно простые) должны были бы быть нечетными и различными. Учитывая же, что $3+5+7=15<17$, $3+5+11=19>17$ и что в случае $3<a<b<c$ $a\geqslant 5$, $b\geqslant 7$, $c\geqslant 9$, откуда $a+b+c\geqslant 5+7+9\geqslant 21>17$, мы легко устанавливаем, что число 17 не дает ни одного разложения.

52*. Дадим здесь доказательство, следуя идее Шинцеля (ср. A. Schinzel. Demonstration d'une conséquence de l'hypothèse de Goldbach Compositio Mathematica, **14**, 1959, стр. 74—75).

Пусть k означает данное натуральное число, m — натуральное число, разложение которого на простые сомножители имеет вид $m=q_1^{\alpha_1}q_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot q_s^{\alpha_s}$. Пусть $f(x)=x(x+2k)$ и пусть i — одно из чисел 1, 2, ..., s. Предположение, что $q_i|x(x+2k)$ при всяком целом x приводит к противоречию. Действительно, тогда для $x=1$ мы получили бы $q_i|2k+1$ и для $x=-1$ $q_i|2k-1$, откуда нашли бы, что $q_i|(2k+1)-(2k-1)=2$, а следовательно, ввиду $q_i|2k+1$, получили бы $q_i|1$, что невозможно. Таким образом, существует целое число x_i, такое, что $q_i\nmid x_i(x_i+2k)=f(x_i)$.

На основании китайской теоремы об остатках существует натуральное число x_0, такое, что $x_0\equiv x_i \pmod{q_i}$ для $i=1, 2, \ldots, s$, что дает $f(x_0)\equiv f(x_i)\not\equiv 0 \pmod{q_i}$ для $i=1, 2, \ldots, s$.

Итак, $(f(x_0), q_i)=1$ для $i=1, 2, \ldots, s$, откуда, учитывая разложение числа m на простые сомножители, находим, что $(f(x_0), m)=1$ или $(x_0(x_0+2k), m)=1$. Следовательно, если мы положим $a=x_0+2k$, $b=x_0$, то будем иметь $2k=a-b$, где $(a, m)=1$ и $(b, m)=1$, что доказывает справедливость нашей теоремы.

Примечание. Если к числам a и b мы прибавим какое-нибудь кратное числа m, то для числа $2k=a-b$ мы получим новое представление в виде разности двух натуральных чисел, взаимно простых с m. Таким образом, мы доказали, что каждое четное

число для любого натурального числа m имеет бесконечное число представлений в виде разности двух натуральных чисел, взаимно простых с m.

Мы не знаем, является ли каждое четное число разностью двух простых чисел. Из одной гипотезы Шинцеля о простых числах вытекает, что каждое четное число представимо в виде разности двух простых чисел бесконечным числом способов.

53*. Проведем доказательство, следуя А. Роткевичу.

Если U_n есть n-й член последовательности Фибоначчи и если m и n — натуральные числа, то $(U_m, U_n) = U_{(m,n)}$ (см. W. Sierpiński, Teoria liczb. Część II. Warszawa, 1959, стр. 280)[1]. Поэтому ($U_1=1$, !) члены бесконечной возрастающей последовательности

$$U_{p_1}, U_{p_2}, U_{p_3}, \ldots$$

попарно взаимно просты. Вместо p_k здесь можно взять $2^{2^k}+1$, так как для натуральных m и $n \neq m$, как известно, $(2^{2^m}+1, 2^{2^n}+1)=1$.

III. Арифметические прогрессии

54. Пусть m — данное натуральное число >1. Числа $m!\cdot k+1$, где $k=1, 2, \ldots, m$, являются попарно взаимно простыми, так как если бы при натуральных k и l, где $k<l\leqslant m$, число $d>1$ было общим делителем чисел $m!k+1$ и $m!l+1$, то можно было бы сделать следующие заключения: $d \mid l(m!k+1)-k(m!l+1)=l-k<m$, $1<d<m$, откуда $d \mid m!$, и наконец, поскольку $d \mid m!k+1$, то $d \mid 1$, вопреки тому, что $d>1$.

55. Таковы, например все члены арифметической прогрессии 2^kt+2^{k-1} (где $t=0, 1, 2, \ldots$), так как в разложение числа $n=2^kt+2^{k-1}$ на простые сомножители число 2 входит в степени с показателем $k-1$. Отсюда при помощи формулы для числа натуральных делителей натурального числа сразу же обнаруживаем, что число натуральных делителей числа n делится на k.

56. Это имеет место, например, при любом натуральном x и $y=5x+2$, $z=7x+3$, так как тогда числа $x(x+1)=x^2+x$, $y(y+1)=25x^2+25x+6$ и $z(z+1)=49x^2+49x+12$ составляют арифметическую прогрессию с разностью $24x^2+24x+6$.

Примечание. Можно доказать, что не существует четырех натуральных чисел $x<y<z<t$, для которых числа $x(x+1)$, $y(y+1)$, $z(z+1)$, $t(t+1)$ составляли бы арифметическую прогрессию. Действительно, если бы указанные числа составляли арифметическую прогрессию, то их четырехкратные, увеличенные на единицу, т. е. числа $(2x+1)^2$, $(2y+1)^2$, $(2z+1)^2$, $(2t+1)^2$ также составляли бы возрастающую арифметическую про-

[1] См. также: Н. Н. Воробьев. Числа Фибоначчи, изд. 2, «Наука». М., 1964, стр. 24. — *Прим. перев.*

грессию, вопреки теореме Ферма, по которой не существует четырех различных квадратов натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию (см., например, W. Sierpiński. Teoria liczb, Czesć II. Warszawa, 1959, стр. 123).

Из задачи **56** следует, что существует бесконечное число арифметических прогрессий, составленных из трех треугольных чисел. Можно также доказать, что существует бесконечное число возрастающих геометрических прогрессий, составленных из трех треугольных чисел. Таковыми являются, например, прогрессии $t_1=1$, $t_3=6$, $t_8=36$; $t_8=6^2$, $t_{20}=6\cdot 35$, $t_{49}=35^2$; $t_{49}=35^2$, $t_{84}=35\cdot 204$, $t_{288}=204^2$.

57. Если стороны пифагорова[1] треугольника составляют арифметическую прогрессию, то мы их можем обозначить через $b-r$, b и $b+r$, где b и r — натуральные числа, так что $(b-r)^2+b^2=(b+r)^2$, откуда $b=4r$, что дает прямоугольный треугольник со сторонами $3r$, $4r$, $5r$, где r может быть любым натуральным числом. Таким образом, любой пифагоров треугольник, стороны которого составляют арифметическую прогрессию, получается в результате умножения сторон треугольника 3, 4, 5 на натуральное число[2].

58. Треугольные числа $t_n=\frac{1}{2}n(n+1)$ являются числами нечетными для $n=4u+1$ $(u=0, 1, 2, \ldots)$ и четными для $n=4u$ $(u=1, 2, \ldots)$. Поэтому каждая из двух прогрессий с разностью 2 содержит бесконечное число треугольных чисел. Прогрессия же $3k+2$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ не содержит ни одного треугольного числа, так как если $3|n$, то $3|t_n$; аналогично, если $n=3u+2$, где $u=0, 1, 2, \ldots$, то $3|t_n$; наконец, если $n=3u+1$, где $u=0, 1, 2, \ldots$, то $t_n=9\frac{u(u+1)}{2}+1$ и, следовательно, при делении на 3 дает в остатке 1.

59. Необходимо и достаточно, чтобы число b было квадратичным вычетом модуля a. Действительно, если при некотором натуральном x и некотором целом $k\geqslant 0$ $x^2=ak+b$, то $x^2\equiv b \pmod a$ и b есть квадратичный вычет для модуля a. Обратно, если b есть квадратичный вычет для модуля a, то существует бесконечное число натуральных чисел x, таких, что $x^2\equiv b \pmod a$ и, следовательно, $x^2=ak+b$, где k есть целое число, а при достаточно большом x — натуральное.

---

[1] Пифагоровым называется прямоугольный треугольник, все стороны которого выражаются натуральными числами. — *Прим. перев.*

[2] Из решения задачи видно, что все треугольники, удовлетворяющие ее условию, подобны треугольнику со сторонами 3, 4, 5. Напрашивается естественный вопрос, верно ли обратное утверждение, т. е. все ли такие треугольники удовлетворяют поставленным условиям. Поскольку выбор единицы масштаба произволен, так что ответ на этот вопрос, конечно, утвердителен, то условие целочисленности сторон треугольника в этой — по существу чисто геометрической — задаче оказывается несущественным, и изложенное здесь ее решение проходит при любых положительных действительных значениях b и r. — *Прим. ред.*

60*. Приведем здесь доказательство А. Шинцеля.

Пусть p_k — k-е по порядку простое число. Пусть s — любое натуральное число и пусть $P=p_1p_2\cdot\ldots\cdot p_s$. Согласно китайской теореме об остатках, для каждого натурального $k\leqslant s$ существует натуральное число a_k, такое, что $a_k\equiv 0 \pmod{P/p_k}$ и $a_k\equiv -1 \pmod{p_k}$. Пусть $Q=1^{a_1}\cdot 2^{a_2}\cdot\ldots\cdot s^{a_s}$. Числа kQ $(k=1, 2, \ldots, s)$, очевидно, составляют возрастающую арифметическую прогрессию, число членов которой равно s. Из определения чисел a_k $(k=1, 2, \ldots, s)$ следует, что $p_k|a_k+1$ и $p_k|a_n$ для $k\neq n$, где n — натуральное число $\leqslant s$.

Таким образом, числа

$$Q_k = k^{\frac{a_k+1}{p_k}} \prod_{\substack{n=1\\ n\neq k}}^{s} n^{\frac{a_n}{p_k}}$$

являются натуральными и, как легко проверить, $kQ=Q_k^{p_k}$ для $k=1, 2, \ldots, s$, т. е. числа kQ $(k=1, 2, \ldots, s)$ являются степенями натуральных чисел с натуральными показателями >1.

61. Теорема, которую мы должны доказать, равносильна теореме, согласно которой в каждой бесконечной возрастающей арифметической прогрессии, составленной из натуральных чисел, существует член, не являющийся степенью натурального числа с натуральным показателем >1. Итак, пусть $a\cdot k+b$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ — бесконечная арифметическая прогрессия, где a и b — натуральные числа.

Существует простое число $p>a+b$.

Так как $(a, p^2)=1$, то уравнение $ax-p^2y=1$ имеет, как известно, решение в натуральных числах x, y. Пусть $k=(p-b)x$; число это, очевидно, натуральное (так как $p>b$) и $ak+b=p^2y(p-b)+p$; таким образом, член $ak+b$ нашей прогрессии делится на простое число p, но не делится на p^2 и поэтому не может быть степенью натурального числа с натуральным показателем >1.

62. Из четырех последовательных натуральных чисел одно должно быть числом вида $4k+2$, где k — целое число $\geqslant 0$, а такое число, как четное, не делящееся на 4, не является степенью натурального числа с натуральным показателем >1.

Примечание. А. Монковский доказал, что не существует трех последовательных натуральных чисел, каждое из которых было бы степенью натурального числа с натуральным показателем >1; доказательство этой теоремы трудно (см.: «Colloquium Mathematicum», 1962, IX, стр. 297). Существуют, однако, два последовательных натуральных числа, каждое из которых является степенью натурального числа с натуральным показателем >1; таковы числа $8=2^3$ и $9=3^2$. Вопрос Каталана, существуют ли другие пары таких последовательных натуральных чисел, остается открытым.

А. Роткевич доказал, что если две степени натуральных чисел, отличные от 8 и 9, имеют показатели >1 и отличаются одно от другого на единицу, то оба эти натураль-

ные числа превосходят 1000. (См.: «Elemente der Mathematik», 1961, 16, стр. 25—27, теорема 1). Роткевич доказал также, что если целые числа x, y, бо́льшие 1, и простые числа z и t удовлетворяют уравнению $x^z - y^t = 1$ и не образуют систему $x=3$, $y=2$, $z=2$, $t=3$, то $x > 10^6$ и $y > 10^6$.

63. Это вытекает непосредственно из задачи 60, но можно предложить и более простое доказательство. Пусть m — данное натуральное число >1 и пусть q_i $(i=1, 2, \ldots, m)$ — такие простые числа, что $a < q_1 < q_2 < \ldots < q_m$.

На основании китайской теоремы об остатках существует натуральное число x, такое, что $ax \equiv -b-aj \pmod{q_j^2}$ для $j=1, 2, \ldots, m$. Отсюда $q_j^2 | a(x+j)+b$ для $j=1, 2, \ldots, m$ и, следовательно, m последовательных членов прогрессии $ak+b$, а именно $a(x+j)+b$ для $j=1, 2, \ldots, m$ являются составными числами.

64*. Очевидно, можно предположить, что m есть натуральное число, большее единицы. Пусть P — произведение всех различных простых делителей числа m, которые являются делителями числа a; если же таких нет, то пусть $P=1$. Пусть Q — произведение всех тех простых делителей числа m, которые являются делителями числа b, а если таковых нет, то пусть $Q=1$. Так как $(a, b)=1$, то и $(P, Q)=1$. Пусть, наконец, R — произведение всех тех простых делителей числа m, которые не являются делителями ни числа a, ни числа b, а если таковых нет, пусть $R=1$. Очевидно, $(R, P)=1$ и $(R, Q)=1$.

Покажем теперь, что $(aPR+b, m)=1$. В самом деле, если допустить противное, то найдется простое число p, такое, что $p|m$ и $p|aPR+b$. Если предположить, что $p|P$, то в силу $p|aPR+b$, $p|b$ и, значит, $p|Q$, вопреки тому, что $(P, Q)=1$. Если предположить, что $p|Q$, то $p|b$ и, значит, $p|aPR$, что невозможно, так как $(a, b)=1$, $(b, P)=1$ и $(b, R)=1$. Если предположить, наконец, что $p|R$, то $p|b$ и, значит, $p|Q$, вопреки тому, что $(P, Q)=1$.

Итак, мы доказали, что $(aPR+b, m)=1$. Отсюда следует, что $(a(km+PR)+b, m)=1$ для $k=0,1,2, \ldots$, т. е. что в нашей прогрессии имеется бесконечное число членов, взаимно простых с m, ч. и т. д.

65. Пусть a и b — натуральные числа, причем b — первый член нашей прогрессии, a — ее разность. Обозначим через r остаток от деления числа b на a; имеем $b=at+r$, где t — целое число $\geqslant 0$ и r — целое число, $0 \leqslant r < a$. Пусть s — любое натуральное число, $c_1, c_2, \ldots, c_s$ — произвольная последовательность цифр десятичной системы счисления, где $c_1 \neq 0$, и пусть N есть s-значное число, цифры которого по порядку суть $c_1, c_2, \ldots, c_s$.

Существует, очевидно, натуральное число n, такое, что $10^n > 2a(t+1)$ и, стало быть, такое, что число $\frac{N \cdot 10^n}{a} - t$ будет >1.

Пусть k — наименьшее натуральное число, большее $\frac{N\cdot 10^n}{a}-t$. Тогда $k-1\leqslant\frac{N\cdot 10^n}{a}-t$ и, следовательно, $k+1\leqslant\frac{N\cdot 10^n}{a}+2-t<\frac{(N+1)10^n}{a}-$ $-t$, так как $10^n>2a$.

Итак, имеем $N\cdot 10^n<a(k+t)\leqslant ak+at+r=ak+b<a(k+t+1)<$ $<(N+1)10^n=N\cdot 10^n+10^n$, откуда следует, что первые s цифр числа $ak+b$ соответственно те же, что и первые s цифр числа N, т. е. $c_1, c_2, \ldots, c_s$.

66. Если члены u_k, u_l и u_m последовательности Фибоначчи составляют возрастающую арифметическую прогрессию, то должно быть $u_l>1$, $l>2$ (так как $u_2=1$), $m>3$ и $u_m=u_l+(u_l-u_k)$, откуда $u_m<u_l+u_l<u_l+$ $+u_{l+1}=u_{l+2}$, т. е. $u_m<u_{l+2}$. Следовательно, $u_m\leqslant u_{l+1}$, а так как $u_m>u_l$, откуда $u_m\geqslant u_{l+1}$, то $u_m=u_{l+1}$, откуда (так как $l>2$) $m=l+1$. Таким образом, $u_k=2u_l-u_m=u_l-(u_{l+1}-u_l)=u_l-u_{l-1}=u_{l-2}$, откуда $k=l-2$.

Итак, если члены u_k, u_l и u_m последовательности Фибоначчи составляют возрастающую арифметическую прогрессию, то должно быть $l>2$, $k=l-2$ и $m=l+1$. С другой стороны, при любом натуральном $l>2$ числа u_{l-2}, u_l и u_{l+1} составляют, как легко проверить, арифметическую прогрессию с разностью u_{l-1}.

Пусть n — натуральное число $>l+1$. Тогда $n\geqslant l+2$, откуда $u_n\geqslant u_{l+2}$ и $u_n-u_{l+1}\geqslant u_{l+2}-u_{l+1}=u_l>u_{l-1}$ (так как $l>2$).

Поэтому никакая возрастающая арифметическая прогрессия не состоит из четырех членов последовательности Фибоначчи.

67*. Известно (см.: W. Sierpiński. Teoria liczb, Część II. Warszawa, 1959, стр. 279, задача 4), что если m — натуральное число, то остатки от деления на m последовательных чисел Фибоначчи составляют периодическую последовательность с чистым периодом[1]. Для $m=2, 3, 4, 5, 6, 7$ остатками при делении на m последовательных чисел Фибоначчи являются соответственно числа (выписываем здесь несколько первых членов, а не все члены периода):

для $m=2$: 1, 1, 0, . . .
для $m=3$: 1, 1, 2, 0, . . .
для $m=4$: 1, 1, 2, 3, 1, 0, . . .
для $m=5$: 1, 1, 2, 3, 0, 3, 3, 1, 4, . . .
для $m=6$: 1, 1, 2, 3, 5, 2, 1, 3, 4, 1, 5, 0, . . .
для $m=7$: 1, 1, 2, 3, 5, 1, 6, 0, 6, 6, 5, 4, . . .

Так как для каждого из натуральных чисел $m\leqslant 7$ мы здесь имеем все возможные вычеты по модулю m, то мы заключаем, что в каждой из арифметических прогрессий с разностью $m\leqslant 7$ содержится бесконечно много чисел Фибоначчи.

---

[1] См. примечание [4] на стр. 140. — *Прим. перев.*

Покажем теперь, что прогрессия $8k+4$ ($k=0, 1, 2, \ldots$) не содержит ни одного члена последовательности Фибоначчи.

Так как $u_1=u_2=1$ и $u_{n+2}=u_n+u_{n+1}$ для $n=1, 2, \ldots$, то легко находим, что числа $u_1, u_2, \ldots u_{14}$ дают при делении на 8 соответственно следующие остатки:

$$1, 1, 2, 3, 5, 0, 5, 5, 2, 7, 1, 0, 1, 1.$$

Отсюда видно, что $8 | u_{13}-u_1$ и $8 | u_{14}-u_2$. Таким образом, можно сказать, что для $n=1$ имеем $8 | u_{n+12}-u_n$ и $8 | u_{n+13}-u_{n+1}$.

Предположим теперь, что последние два соотношения выполняются для некоторого натурального n. Тогда $8 | u_{n+12}+u_{n+13}-(u_n+u_{n+1})$, или $8 | u_{n+14}-u_{n+2}$, что (так как $8 | u_{n+13}-u_{n+1}$) доказывает, что наши соотношения имеют место для числа $n+1$. Отсюда индукцией по n получаем, что $8 | u_{n+12}-u_n$ для $n=1, 2, \ldots$. Тем самым доказано, что последовательность остатков, получаемых при делении на 8 последовательных чисел Фибоначчи, является периодической с чистым двенадцатичленным периодом.

Рассмотрение полученной выше последовательности остатков от деления на 8 первых четырнадцати членов последовательности Фибоначчи показывает, что остатками могут быть только числа 0, 1, 2, 3, 5 и 7. Так как среди остатков нет чисел 4 и 6, то в прогрессиях $8k+4$ и $8k+6$ ($k=0, 1, 2, \ldots$) не содержится ни одного члена последовательности Фибоначчи. Это, очевидно, арифметические прогрессии (составленные из натуральных чисел) с наименьшей возможной при этих условиях натуральной разностью.

68*. Такова, например, прогрессия $11k+4$ ($k=0, 1, 2, \ldots$).

Поступая так же, как при решении задачи **67**, мы здесь легко докажем индукцией по n, что $11 | u_{n+10}-u_n$ для $n=1, 2, \ldots$, откуда следует, что последовательность остатков от деления на 11 последовательных чисел Фибоначчи является периодической с десятичленным периодом. Последний, как легко убедиться, есть последовательность 1, 1, 2, 3, 5, 8, 2, 10, 1, 0, в которой нет числа 4 (а также чисел 6, 7 и 9).

69. Предположим, что мы имеем n членов нашей прогрессии

$$ak_1+b, ak_2+b, \ldots, ak_n+b,$$

являющихся попарно взаимно простыми (для $n=1$ можно принять $k_1=1$). Пусть $m=(ak_1+b)(ak_2+b)\ldots(ak_n+b)$.

На основании задачи **64** существует натуральное число k_{n+1}, такое, что $(ak_{n+1}+b, m)=1$ и, следовательно, $(ak_{n+1}+b, ak_i+b)=1$ для $i=1, 2, \ldots, n$. Таким образом, числа

$$ak_1+b, ak_2+b, \ldots, ak_n+b, ak_{n+1}+b$$

являются попарно взаимно простыми.

Итак, бесконечная последовательность натуральных чисел $k_1, k_2, \ldots$ определена посредством индукции, бесконечная же последовательность ak_i+b $(i=1, 2, \ldots)$ есть последовательность членов нашей прогрессии, являющихся попарно взаимно простыми.

70*. Пусть $d=(a, a+b)$. Тогда $a=da_1$, $a+b=dc$, где $(a_1, c)=1$, $c>1$ (так как $d\leqslant a$ и $dc=a+b>a$). Так как $(a_1, c)=1$, то по теореме Эйлера $c^{\varphi(a_1)}\equiv 1 \pmod{a_1}$, откуда $c^{n\varphi(a_1)}\equiv 1 \pmod{a_1}$ для натуральных n, т. е. $c^{n\varphi(a_1)}-1=t_na_1$, где t_n — натуральное число, которое может быть сколь угодно большим (так как $c>1$ и n — произвольное натуральное число), причем $a(ct_n+1)+b=da_1\cdot ct_n+dc=dc^{n\varphi(a_1)+1}$. Таким образом, член нашей прогрессии $a(ct_n+1)+b$ (который может быть сколь угодно большим) имеет только те и притом все те простые делители, которые являются простыми делителями числа $dc>1$.

Итак, в нашей прогрессии содержится бесконечное число членов, имеющих одни и те же простые делители.

Ср. G. Pólya. Mathematische Zeitschrift, 1, 1918, стр. 144.

71. Из теоремы Дирихле непосредственно следует, что теорема, которую мы хотим доказать, справедлива для $s=1$. Пусть теперь s — данное натуральное число. Предположим, что теорема справедлива для числа s. Таким образом, если $(a, b)=1$, то существует число k_0, такое, что $ak_0+b=q_1q_2\ldots q_s$, где $q_1<q_2<\ldots<q_s$ являются простыми числами. Согласно теореме Дирихле существует бесконечное число натуральных чисел k, таких, что $ak+1=q$ есть простое число $>q_s$.

Для $t=q_1q_2\ldots q_sk+k_0$ имеем:

$$at+b=q_1q_2\ldots q_sak+ak_0+b=q_1q_2\ldots q_s(ak+1)=q_1q_2\ldots q_sq,$$

т. е. теорема справедлива для $s+1$. Таким образом, индукцией по s устанавливается справедливость теоремы для каждого натурального числа s.

72. Если p — простое число, то из трех чисел p, $p+10$ и $p+20$ одно всегда делится на 3 (так как $p+10\equiv p+1 \pmod 3$, $p+20\equiv p+2 \pmod 3$, из трех же последовательных целых чисел одно всегда делится на 3). Поскольку все наши числа являются простыми, то одно из них, очевидно, наименьшее должно быть числом 3. Итак, $p=3$, $p+10=13$, $p+20=23$. Таким образом, существует только одна арифметическая прогрессия с разностью 10, составленная из трех простых чисел, именно прогрессия 3, 13, 23.

Далее, легко доказать, что не существует арифметической прогрессии с разностью 10, состоящей из четырех (или более) простых чисел. Действительно, если бы простые числа p, $p+10$, $p+20$, $p+30, \ldots$ составляли такую прогрессию, то по доказанному было бы $p=3$, число же $p+30=33=3\cdot 11$ не является простым.

Примечание. Из одной гипотезы А. Шинцеля о простых числах следует, что существует бесконечное число простых чисел p, для которых число $p+10$ также простое, например 7 и 17, 13 и 23, 19 и 29, 31 и 41, 37 и 47, 61 и 71, 73 и 83, 79 и 89.

73. Таких прогрессий нет, так как из чисел p, $p+100$ и $p+200$ всегда одно делится на 3 и, значит, если оно простое, то должно быть числом 3. Но если $p=3$, то число $p+200=203=7\cdot 29$ не является простым.

Примечание. Аналогично доказывается, что не существует прогрессий с разностью 1000, состоящих из трех или более простых чисел, так как $1003=17\cdot 59$ есть число составное. Из гипотезы Шинцеля вытекает, что существует бесконечное число простых чисел p, для которых число $p+1000$ также есть простое, например 13 и 1013, 19 и 1019, 31 и 1031, 61 и 1061, 97 и 1097, 103 и 1103, 1039 и 2039.

74*. Если бы разность нашей прогрессии была числом нечетным, то второй член этой прогрессии был бы числом четным, что невозможно, поскольку прогрессия составлена из десяти простых чисел. Итак, разность нашей прогрессии есть число четное. Если бы первым членом прогрессии было число 2, то следующим членом было бы число четное составное. Таким образом, первый член прогрессии есть число простое нечетное и, следовательно, все члены прогрессии (ввиду четности разности прогрессии) являются числами простыми нечетными.

Известна следующая теорема В. Тебольта: Если n членов арифметической прогрессии являются простыми нечетными числами, то разность прогрессии делится на каждое простое число $<n$ (см., например: W. Sierpiński. Teoria liczb, Część II. Warszawa, 1959, стр. 348, теорема 3).

Из этой теоремы следует (для $n=10$), что разность нашей прогрессии должна быть кратна числам 2, 3, 5, 7 и, следовательно, числу 210. Будем искать вначале арифметическую прогрессию с разностью 210, составленную из десяти возможно наименьших простых чисел.

Так как число 210 (разность прогрессии) делится на 2, 3, 5 и 7, то, очевидно, ни одно из этих чисел не может быть первым членом нашей прогрессии. Число 11 также не может быть им, так как в таком случае вторым членом было бы составное число $221=13\cdot 17$. Итак, первый член нашей прогрессии >11 и поэтому ни один член нашей прогрессии не делится на 11. Число 210 при делении на 11 дает в остатке 1. Если бы первый член прогрессии при делении на 11 давал остаток >1, то с каждым следующим членом остаток увеличивался бы на 1 и, следовательно, один из членов нашей прогрессии оказался бы делящимся на 11, что невозможно. Значит, первый член нашей прогрессии должен при делении на 11 давать в остатке 1 и, будучи числом нечетным, должен быть вида $22k+1$, где k — натуральное число. Последовательными простыми числами этого вида являются 23, 67, 89, 199, ...

Если бы первым членом нашей прогрессии было число 23, то шестым его членом было бы составное число $1073=29\cdot 37$. Если бы первым чле-

ном нашей прогрессии было число 67, то четвертым его членом было бы составное число $697=17\cdot41$. Если бы первым членом нашей прогрессии было число 89, то вторым его членом было бы составное число $299=$ $=13\cdot23$. Но если в качестве первого члена нашей прогрессии мы возьмем число 199, то получим прогрессию с разностью 210, состоящую из десяти простых чисел:

199, 409, 619, 829, 1039, 1249, 1459, 1669, 1879, 2089.

Это и есть прогрессия с разностью 210, составленная из десяти возможно наименьших простых чисел.

Предположим теперь, что мы имеем возрастающую арифметическую прогрессию с разностью r, отличной от 210. В таком случае, как мы знаем, r должно быть кратным 210 и отличным от 210, так что во всяком случае $r\geqslant420$. Но тогда уже второй член прогрессии больше чем 420 и, значит, больше чем второй член (т. е. 409) найденной выше прогрессии. Следовательно, дальнейшие члены прогрессии и подавно будут больше соответствующих членов нашей прогрессии.

Таким образом, найденная нами десятичленная арифметическая прогрессия с первым членом 199 и разностью 210 есть десятичленная возрастающая арифметическая прогрессия, составленная из простых чисел, последнее из которых является возможно наименьшим.

Примечание. Арифметическая возрастающая прогрессия, состоящая из простых чисел и имеющая наибольшую длину, известная в настоящее время, есть тринадцатичленная прогрессия с первым членом 4943 и разностью 60 060, найденная В. Н. Серединским из Москвы.

Из гипотезы Шинцеля о простых числах следует, что существует бесконечное число тринадцатичленных арифметических прогрессий с разностью 30 030, состоящих из простых чисел (см.: Acta Arithmetica, IV, 1958, стр. 191, $C_{1,4}$). Однако ни одной такой прогрессии до сих пор не найдено.

75. Такова, например, прогрессия $30k+7$ ($k=1, 2, 3, \ldots$).

Действительно, если, допустим, что $30k+7=p+q$, то, так как $30k+7$ есть нечетное число, одно из чисел p и q будет четным и, следовательно, как простое, будет равно 2, так что, если, например, $q=2$, то $p=30k+$ $+5=5(6k+1)$, что невозможно, если p — простое число. Если же мы допустим, что $30k+7=p-q$, где p и q — простые числа, то будет $q=2$ и, следовательно, $p=30k+9=3(10k+3)$, что также невозможно.

Примечание. Можно доказать (хотя это и трудное дело), что существует бесконечное число четных чисел, являющихся одновременно и суммами, и разностями двух простых чисел. А из одной гипотезы Шинцеля о простых числах следует, что существует бесконечное число нечетных чисел, являющихся одновременно и суммами, и разностями двух простых чисел. См.: W. Sierpiński, Sur les nombres qui sont sommes et différences de deux nombres premiers, Publikacje Elektrotechn. Fakulteta, Ser. Mat. i Fiz. Beograd, 84, 1963.

IV. Простые и составные числа

76. Достаточно взять $p=3$ и $q=5$. Если n есть четное число >6, то $n-1\geqslant 6$ и $p<q<n-1$, причем $n-p=n-3$ и $n-q=n-5$ являются последовательными нечетными числами и, значит, взаимно простыми.

77. Существует только одно такое простое число: 5. В самом деле, допустим, что простое число r есть одновременно и сумма, и разность двух простых чисел. Число r, очевидно, должно быть больше двух, и поэтому r есть нечетное простое число. Далее, так как r есть и сумма, и разность двух простых чисел, то одно из них должно быть нечетным, а другое четным, т. е. числом 2.

Итак, имеем $r=p+2=q-2$, где p и q являются нечетными простыми числами. Но тогда p, $r=p+2$ и $q=r+2$ являются тремя последовательными нечетными простыми числами, а, как известно, существует только одна такая тройка: 3, 5, 7 (так как из каждых трех последовательных нечетных чисел одно должно быть делящимся на 3). Таким образом, имеем $r=5=3+2=7-2$.

78. $n=113, 139, 181$; $m=20, 51, 62$.

79. Согласно известной теореме Ферма каждое простое число вида $4k+1$ есть сумма двух квадратов натуральных чисел (см., например: В. Серпинский. Что мы знаем и чего не знаем о простых числах. Теорема 17). Поэтому для такого p $p=a^2+b^2$, где a и b — натуральные числа и притом различные (так как p — нечетное), например, $a>b$. Отсюда $p^2=(a^2-b^2)^2+(2ab)^2$, т. е. p является гипотенузой прямоугольного треугольника, катетами которого являются натуральные числа a^2-b^2 и $2ab$. Так, $5^2=3^2+4^2$, $13^2=5^2+12^2$, $17^2=15^2+8^2$, $29^2=21^2+20^2$.

80. $13^2+1=7^2+11^2$, $17^2+1=11^2+13^2$, $23^2+1=13^2+19^2$, $31^2+1=11^2+29^2$.

Примечание. Из тождества $(5x+13)^2+1=(3x+7)^2+(4x+11)^2$ следует, что если числа $p=5x+13$, $q=3x+7$, $r=4x+11$ являются простыми, то $p^2+1=q^2+r^2$. Из одной гипотезы Шинцеля о простых числах вытекает, что таких систем простых чисел существует бесконечное множество.

81. Заметим прежде всего, что если p, q, r, s и t являются простыми числами и $p^2+q^2=r^2+s^2+t^2$, то каждое из чисел p и q отлично от каждого из чисел r, s и t. Действительно, если бы было, например, $p=r$, то мы получили бы уравнение $q^2=s^2+t^2$, не имеющее решений в простых числах q, s, t, так как числа s и t не могут быть оба ни четными, ни нечетными (в любом из этих случаев было бы $q=2$, что невозможно, так как правая часть >4). Если же взять $s=2$, то число 4 будет разностью двух квадратов натуральных чисел, что невозможно.

Если $p^2+q^2=r^2+s^2+t^2$, то все числа p, q, r, s, t не могут здесь быть нечетными. Если p — четное, следовательно, $p=2$, то числа q, r, s, t дол-

жны быть нечетными, а так как квадрат нечетного числа при делении на 8 дает в остатке 1, то левая часть при делении на 8 давала бы остаток 5, правая же — остаток 3, что невозможно. Если числа p и q оба нечетные, то левая часть при делении на 8 дает остаток 2, а в правой части, как легко заметить, только одно из чисел может (и должно) быть четным, например, $r=2$. Но тогда правая часть при делении на 8 дает остаток 6, что невозможно.

82*. Решение найдено А. Шинцелем.

Существует только одно такое решение: $p=q=2$, $r=3$. Чтобы это показать, найдем все решения уравнения $p(p+1)+q(q+1)=n(n+1)$, где p и q — простые числа, n же — натуральное число. Уравнение наше дает:

$$p(p+1)=n(n+1)-q(q+1)=(n-q)(n+q+1),$$

причем должно быть $n>q$. Отсюда, так как p — простое число, имеем $p|n-q$ или $p|n+q+1$. Если $p|n-q$, то должно быть $p\leqslant n-q$, откуда $p(p+1)\leqslant(n-q)(n-q+1)$ и, следовательно, $n+q+1\leqslant n-q+1$, что невозможно. Таким образом, $p|n+q+1$ и, значит, при некотором натуральном k

$$n+q+1=kp, \text{ откуда } p+1=k(n-q). \qquad (1)$$

Если бы было $k=1$, то было бы $n+q+1=p$ и $p+1=n-q$, откуда $p-q=n+1$ и $p+q=n-1$, что невозможно.

Итак, $k>1$. Из формул (1) легко получаем:

$$2q=(n+q)-(n-q)=kp-1-(n-q)=k[k(n-q)-1]-1-(n-q)=$$
$$=(k+1)[(k-1)(n-q)-1].$$

Так как $k\geqslant2$ и, значит, $k+1\geqslant3$, то из полученного равенства, левая часть которого имеет только натуральные делители 1, 2, q и $2q$, вытекает, что $k+1=q$ или $k+1=2q$. Если $k+1=q$, то $(k-1)(n-q)=3$ и, значит, $(q-2)(n-q)=3$, что дает либо $q-2=1$, $n-q=3$, откуда $q=3$, $n=6$, $k=q-1=2$ и, в силу (1), $p=5$, либо $q-2=3$, $n-q=1$, откуда $q=5$, $n=6$, $k=4$ и, в силу (1), $p=3$.

Если же $k+1=2q$, то $(k-1)(n-q)=2$ и, значит, $2(q-1)(n-q)=2$, откуда $q-1=1$ и $n-q=1$; следовательно, $q=2$, $n=3$ и из (1) найдем $p=2$. Итак, при натуральном n имеем только следующие решения в простых числах p и q:

1. $p=q=2$, $n=3$, 2. $p=5$, $q=3$, $n=6$ и 3. $p=3$, $q=5$, $n=6$. Все три числа p, q, n являются простыми только в первом случае.

Примечание. Если через $t_n=\frac{n(n+1)}{2}$ мы обозначим n-е треугольное число, то доказанную теорему можно сформулировать так: уравнение $t_p+t_q=t_r$ имеет только одно решение в простых числах: $p=q=2$, $r=3$.

83*. Таковы, например, простые числа $p=127$, $q=3697$ и $r=5527$. Убедиться, что это простые числа (например, при помощи таблицы простых чисел), а затем, что числа $p(p+1)$, $q(q+1)$ и $r(r+1)$ составляют арифметическую прогрессию, не представляет особого труда. А вот способ, при помощи которого можно искать такие простые числа.

Из легко проверяемого тождества

$$n(n+1)+(41n+20)(41n+21)=2(29n+14)(29n+15)$$

следует, что при натуральном n числа $n(n+1)$, $(29n+14)(29n+15)$ и $(41n+20)(41n+21)$ составляют арифметическую прогрессию. Если бы при некотором натуральном n числа n, $29n+14$ и $41n+20$ все три были простыми, то мы имели бы три искомых числа.

Таким образом, нужно вместо n подставлять последовательные нечетные простые числа и проверять, будут ли оба числа $29n+4$ и $41n+20$ простыми. Наименьшим таким числом n является $n=127$, которое и приводит к решению, предложенному выше. Однако мы не утверждаем, что указанным способом могут быть найдены все тройки простых чисел, удовлетворяющие условию нашей задачи.

Примечание. Из одной гипотезы Шинцеля вытекает, что существует бесконечное число простых чисел n, для которых числа $29n+14$ и $41n+20$ являются одновременно простыми.

Нашу задачу можно сформулировать еще так: найти три треугольных числа с простыми номерами (индексами), образующих возрастающую арифметическую прогрессию.

84. Существует только одно такое натуральное число: $n=4$. В самом деле, для $n=1$ число $n+3=4$ составное, для $n=2$ число $n+7=9$ составное, для $n=3$ число $n+1=4$ составное, для $n>4$ все наши числа >5 и по крайней мере одно из них делится на 5, так как числа 1, 3, 7, 9, 13 и 15 при делении на 5 дают соответственно остатки 1, 3, 2, 4, 3 и 0, т. е. все возможные остатки, откуда следует, что и числа $n+1$, $n+3$, $n+7$, $n+9$, $n+13$ и $n+15$ при делении на 5 дают все возможные остатки и, следовательно, хотя бы одно из них делится на 5 и как число, большее пяти (так как $n>4$), является составным. Но для $n=4$ мы получаем простые числа 5, 7, 11, 13, 17 и 19.

Примечание. Из одной гипотезы Шинцеля о простых числах вытекает, что существует бесконечное число натуральных чисел n, для которых каждое из пяти чисел $n+1$, $n+3$, $n+7$, $n+9$ и $n+13$ является простым. Таковы, например, числа $n=4$, 10, 100. Ср.: W. Sierpiński. Bull. Soc. Royale Sciences Liège, 1962, стр. 319, P_2.

85. Существует только одно такое число: $k=1$. Для него последовательность

$$k+1,\ k+2,\ \ldots,\ k+10 \qquad (1)$$

содержит пять простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11. Для $k=0$ и $k=2$ в последо-

вательности (1) имеется только по четыре простых числа. Если же $k \geqslant 3$, то в последовательности (1) нет числа 3. Как известно, среди трех последовательных нечетных чисел всегда одно делится на 3. Таким образом, в последовательности (1) существует по крайней мере одно нечетное составное число. Далее, в последовательности (1) всегда имеется пять четных чисел и, значит (для $k>2$), составных. Итак, в последовательности (1) для $k \geqslant 3$ мы имеем по меньшей мере шесть составных чисел и, следовательно, не более четырех простых чисел.

Примечание. Последовательность (1) содержит по четыре простых числа для $k=0, 2, 10, 100, 190, 820$. Мы не знаем, существует ли бесконечное число таких чисел k. Из одной гипотезы Шинцеля о простых числах вытекает утвердительный ответ на этот вопрос.

86. Существует только одно такое число: $k=1$. Для него последовательность

$$k+1,\ k+2,\ \ldots,\ k+100 \qquad (1)$$

содержит 26 простых чисел. Для $k=0, 2, 3, 4$ последовательность (1) содержит по 25 простых чисел. Таким образом, далее можно полагать $k \geqslant 5$. Последовательность (1) содержит 50 четных чисел, которые для $k>1$ все составные. Она содержит также 50 последовательных нечетных чисел, среди которых имеется по крайней мере 16 чисел, кратных 3, и, значит (для $k>2$), составных (так как в каждой тройке последовательных нечетных чисел есть одно число, делящееся на 3). Подсчитаем теперь, сколько имеется в последовательности (1) чисел, делящихся на 5, но не делящихся ни на 2, ни на 3. Таковыми являются все числа вида $30t+\gamma$, где t — целое число $\geqslant 0$, а γ — одно из чисел 5 и 25. Составим из всех чисел этого вида бесконечную возрастающую последовательность

$$5,\ 25,\ 35,\ 55,\ 65,\ 85,\ 95,\ 115,\ 125,\ 145,\ 155,\ 175,\ 185,\ \ldots, \qquad (2)$$

n-й член которой обозначим через u_n. Легко проверить, что $u_{n+6}-u_n<100$ для $n=1, 2, \ldots$. Пусть u_n — наибольший член последовательности $u_1, u_2, \ldots$, не превосходящий k. Тогда будем иметь $u_n \leqslant k < u_{n+1} < u_{n+6} < u_n+100 \leqslant k+100$, откуда видно, что в последовательности (1) имеется по крайней мере шесть чисел последовательности (2) и, следовательно, по крайней мере шесть чисел, делящихся на 5, но не делящихся ни на 2, ни на 3, которые для $k \geqslant 5$ все являются составными числами.

Подсчитаем, наконец, сколько в последовательности (1) имеется чисел, делящихся на 7, но не делящихся ни на 2 ни на 3, ни на 5. Такими будут все числа вида $210t+\gamma$, где γ — одно из чисел 7, 49, 77, 91, 119, 133, 161, 203, а t — целое число $\geqslant 0$. Составим из всех чисел этого вида бесконечную возрастающую последовательность

$$7,\ 49,\ 77,\ 91,\ 119,\ 133,\ 161,\ 203,\ 217,\ 259,\ 287,\ \ldots, \qquad (3)$$

n-й член которой обозначим через v_n. Легко проверить, что $v_{n+3}-v_n<$ <100 для $n=1, 2, \ldots$. Пусть v_n — наибольший член последовательности $v_1, v_2, \ldots$, не превосходящий k. Тогда будем иметь $v_n \leqslant k <$ $< v_{n+1} < v_{n+3} < v_n+100 \leqslant k+100$; откуда видно, что в последовательности (1) имеется по крайней мере три числа последовательности (3), т. е. по крайней мере три числа, делящихся на 7, но не делящихся ни на 2, ни на 3 и ни на 5, которые для $k \geqslant 7$ все являются составными.

Отсюда следует, что для $k \geqslant 7$ в последовательности (1) имеется по крайней мере $50+16+6+3=75$ составных чисел и, следовательно, не более 25 простых чисел. Для $k=5$ и $k=6$ последовательность (1) содержит, очевидно, составные числа v_2, v_3 и v_4. Таким образом, для $k>1$ последовательность (1) содержит не более 25 простых чисел.

87. Существует только шесть таких сотен, а именно те, первыми членами которых являются числа 1, 3, 4, 5, 10 и 11.

Доказательство этой теоремы вытекает из следующей леммы: для $k>11$ среди чисел $k, k+1, \ldots, k+99$ имеется по крайней мере 76 чисел, делящихся на 2, 3, 5, 7 или 11.

Для доказательства леммы составим бесконечную возрастающую последовательность натуральных чисел, делящихся на 2, 3, 5, 7 или 11. Если число γ содержится в нашей последовательности, то в ней также содержится число $\gamma+2310$, и наоборот (так как $2310=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11$). Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ — все натуральные числа, не превосходящие 2310 и делящиеся на 2, 3, 5, 7 или 11. Тогда все числа нашей последовательности содержатся в s арифметических прогрессиях $2310t+\gamma_i$, где $i=1, 2, \ldots, s$, $t=0, 1, 2, \ldots$. Теперь достаточно выписать все натуральные числа, не превосходящие $2310+100$ и делящиеся на 2, 3, 5, 7 или 11, и убедиться, что в каждой сотне чисел $k, k+1, \ldots, k+99$ для $1 \leqslant k \leqslant 2310$ имеется по крайней мере 76 чисел из выписанной последовательности.

Примечание. Труднее было бы доказать, что существует лишь конечное число натуральных чисел k, для которых в последовательности $k, k+1, \ldots, k+99$ содержится 24 простых числа. Из одной гипотезы Шинцеля вытекает, что существует бесконечно много натуральных чисел k, для которых эта последовательность содержит 23 простых числа.

88. Существует только одно такое простое число: $p=3$. В самом деле, если p — простое число, то на основании малой теоремы Ферма $p \mid 2^p-2$ и если $p \mid 2^p+1$, то $p \mid 3$ и, следовательно, $p=3$.

89. Лемма. В каждом отрезке натурального ряда, состоящем из 21 числа, имеется по крайней мере 14 чисел, делящихся хотя бы на одно из чисел 2, 3 или 5.

Доказательство. В каждом отрезке натурального ряда, состоящем из 21 числа, содержится по крайней мере 10 чисел, делящихся на 2, и по крайней мере 10 последовательных нечетных чисел, среди которых имеется хотя бы три числа, делящихся на 3. Таким образом, остается

показать, что в каждом отрезке натурального ряда, состоящем из 21 числа, содержится по крайней мере одно число, делящееся на 5, но не делящееся ни на 2, ни на 3. Пусть γ означает остаток от деления числа x на 30. Тогда $x=30t+\gamma$, где t — целое число $\geqslant 0$, а $\gamma=0, 1, \ldots, 29$. Если $\gamma\leqslant 5$, то $x\leqslant 30t+5<x+20$ и число $30t+5$ есть число последовательности $x, x+1, \ldots, x+20$, делящееся на 5, но не делящееся ни на 2, ни на 3. Если же $5<\gamma\leqslant 25$, то $x\leqslant 30t+25<x+20$ и число $30t+25$ есть число последовательности $x, x+1, \ldots, x+20$, делящееся на 5, но не делящееся ни на 2, ни на 3. Если, наконец, $25<\gamma<30$, то $x<30t+35<x+20$ и число $30t+35$ есть число последовательности $x, x+1, \ldots, x+20$, делящееся на 5, но не делящееся ни на 2, ни на 3. Итак, лемма доказана.

Из нашей леммы непосредственно следует, что в каждом отрезке натурального ряда, состоящем из 21 числа, любое из которых >5, мы имеем по меньшей мере 14 составных чисел и, следовательно, не более 7 простых чисел. Для $x=1$, 2 и 3 в последовательности $x, x+1, \ldots, x+20$ мы имеем по 8 простых чисел, а для $x=4$ и $x=5$ имеем по 7 простых чисел. Таким образом, в последовательности $x, x+1, \ldots, x+20$ мы имеем по 8 простых чисел только для $x=1$, 2 и 3.

90. Существует только одно такое число: $p=5$. Как легко проверить, здесь не может быть $p<5$. Для $p=5$ мы имеем здесь простые числа 5, 7, 11, 13, 17 и 19. Если $p>5$ и $p=5k$, где k — натуральное число, то p — составное число. Если $p=5k+1$, то число $p+14$ делится на 5 и потому составное. Если $p=5k+2$, то число $p+8$ делится на 5 и потому составное. Если $p=5k+3$, то $5|p+12$ и, значит, $p+12$ есть составное число. Наконец, если $p=5k+4$, то $5|p+6$ и число $p+6$ — составное.

91. Таковы, как легко проверить, для натуральных $k>1$ пары $m=2^k-2$ и $n=2^k(2^k-2)$, для которых $m+1=2^k-1$ и $n+1=(2^k-1)^2$.

Примечание. П. Эрдёш поставил вопрос, существуют ли другие такие пары. См.: P. Erdös. Quelques problemes de la Theorie des Nombres, Monographies de l'Enseignement Mathématique, № 6, стр. 126, задача 60[1].

92. Существует только два таких простых числа: $2=\frac{2\cdot 3}{2}-1$ и $5=\frac{3\cdot 4}{2}-1$. В самом деле, $\frac{n(n+1)}{2}-1=\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$, а для $n>4$ числа $n-1$ и $n+2$ оба >2, причем одно из них четное.

93. Существует только три таких простых числа: $T_1+1=2$, $T_2+1=5$ и $T_3+1=11$. Действительно, для $n\geqslant 4$ имеем $T_n+1=\frac{(n+3)(n^2+2)}{6}$,

---

[1] На вопрос П. Эрдёша можно дать утвердительный ответ. Недавно А. Монковский сообщил мне пару чисел $m=75=3\cdot 5^2$, $n=1215=5\cdot 3^5$, для которых $m+1=2^2\cdot 19$, $n+1=2^6\cdot 19$. — *Прим. пер.*

причем $n+3>6$ и $n^2+2>6$ и либо из чисел $n+3$ и n^2+2 одно четное, а другое делится на 3, либо одно из них делится на 6.

94. Таково, например, число

$$n=(p_2-1)(p_3-1)\ \ldots\ (p_{s+1}-1),$$

так как на основании малой теоремы Ферма число 2^n-1 делится тогда на каждое из простых чисел $p_2, p_3, \ldots, p_{s+1}$.

95. $2=1^4+1^4$, $17=1^4+2^4$, $97=2^4+3^4$, $257=1^4+4^4$, $641=2^4+5^4$.

Примечание. Из одной гипотезы Шинцеля о простых числах вытекает, что существует бесконечно много простых чисел, являющихся суммами двух биквадратов натуральных чисел, и, общее, что для каждого натурального числа n существует бесконечно много простых чисел вида $a^{2^n}+b^{2^n}$, где a и b — натуральные числа.

96. Пусть p_k — k-е по порядку простое число и пусть p_{k_n} для натурального числа n означает наибольшее простое число $\leqslant 6n+1$. Так как числа $6n+2=2(3n+1)$, $6n+3=3(2n+1)$ и $6n+4=2(3n+2)$ являются составными, то ясно, что $p_{k_n+1}\geqslant 6n+5$ и, следовательно, $p_{k_n+1}-p_{k_n}\geqslant$ $\geqslant(6n+5)-(6n+1)=4$, т. е. последовательные простые числа p_{k_n} и p_{k_n+1} не составляют пару простых чисел-близнецов.

Так как $p_{k_n+1}\geqslant 6n+5$, а n может быть любым натуральным числом, то таких пар чисел p_{k_n}, p_{k_n+1} существует бесконечно много. Заметим, однако, что в такой паре p_{k_n}, p_{k_n+1} p_{k_n} может быть бóльшим числом из некоторой пары простых чисел-близнецов, а p_{k_n+1} — меньшим числом из некоторой другой пары простых чисел-близнецов; например: для $n=1$ $p_{k_n}=7$ есть большее из пары чисел-близнецов 5 и 7, а $p_{k_n+1}=11$ есть меньшее из пары чисел-близнецов 11 и 13; для $n=2$ $p_{k_n}=13$ есть большее из пары 11 и 13, а $p_{k_n+1}=17$ есть меньшее из пары 17 и 19; для $n=17$ $p_{k_n}=103=6\cdot17+1$ есть большее из пары 101 и 103, а $p_{k_n+1}=107$ есть меньшее из пары 107 и 109.

97. Согласно теореме Дирихле об арифметической прогрессии в прогрессии $15k+7$, где $k=1, 2, 3, \ldots$, содержится бесконечно много простых чисел. Ни одно из этих чисел не принадлежит ни к одной паре простых чисел-близнецов, так как $(15k+7)+2=3(5k+3)$ и $(15k+7)-2=$ $=5(3k+1)$ (поскольку $k>0$) — составные числа.

98. Если для натурального числа n число n^2-1 является произведением трех различных простых чисел, то, так как $2^2-1=3$, число n должно быть >2. С другой стороны, n должно быть четным, так как иначе оба сомножителя правой части равенства $n^2-1=(n-1)(n+1)$ были бы четными и оказалось бы, что $2^2|n^2-1$. При этом числа $n-1$ и $n+1$, которые оба >1 (так как $n>2$), не могут быть оба составными, ибо в этом случае число n^2-1 не является произведением трех разных простых чи-

сел. Следовательно, одно из чисел $n-1$ и $n+1$ должно быть простым, другое же — произведением двух различных простых чисел. Для $n=4$ имеем $n-1=3$, $n+1=5$, т. е. условие это не выполняется. Аналогично для $n=6$, так как $n-1=5$, $n+1=7$. Для $n=8$ имеем $n-1=7$, $n+1=3^2$. Для $n=10$ $n-1=3^2$, для $n=12$ $n-1=11$, $n+1=13$. Для $n=14$ $n-1=13$, $n+1=3\cdot5$.

Наименьшее натуральное число n, для которого n^2-1 является произведением трех различных простых чисел, есть число $n=14$, для которого $n^2-1=3\cdot5\cdot13$. Так как $16^2-1=3\cdot5\cdot17$, то следующим таким числом n является $n=16$. Так как $18^2-1=17\cdot19$, $20^2-1=19\cdot21=3\cdot7\cdot19$, то третьим по порядку таким числом n является $n=20$. Затем имеем $22^2-1=3\cdot7\cdot23$, и, значит, четвертое искомое число есть $n=22$. Поступая таким образом далее, легко найдем, что пятое искомое число есть $n=32$, для которого $n^2-1=3\cdot11\cdot31$. Итак, пятью наименьшими искомыми числами являются 14, 16, 20, 22 и 32.

Примечание. Из одной гипотезы Шинцеля о простых числах следует, что таких чисел n существует бесконечно много и что вообще для каждого натурального числа $s>1$ существует бесконечно много натуральных чисел n, для которых n^2-1 является произведением s различных простых чисел. Очевидно, для $s=2$ числа $n-1$ и $n+1$ дают тогда пару простых чисел-близнецов.

99. Пятью наименьшими натуральными числами n, для которых число n^2+1 является произведением трех различных простых сомножителей, являются числа 13, 17, 21, 23 и 27. Здесь мы имеем $13^2+1=2\cdot5\cdot17$, $17^2+1=2\cdot5\cdot29$, $21^2+1=2\cdot13\cdot17$, $23^2+1=2\cdot5\cdot53$, $27^2+1=2\cdot5\cdot73$. Для $n=112$ имеем $112^2+1=5\cdot13\cdot193$.

Примечание. Из одной гипотезы Шинцеля о простых числах следует, что для каждого натурального числа s существует бесконечно много натуральных чисел n, для которых число n^2+1 является произведением s различных простых чисел.

100. а)* Предположим, что каждое из трех натуральных чисел n, $n+1$, $n+2$, где $n>7$, имеет только по одному простому делителю. Тогда ни одно из этих чисел не делится на 6, и поэтому число n может быть только вида $6k+1$, $6k+2$ или $6k+3$, где k — натуральное число.

Если $n=6k+1$, то число $6k+2$, как четное и имеющее только один простой делитель, должно быть вида 2^m, где m — натуральное число >3 (так как $n>7$ и, значит, $6k+2=n+1>8$). Число же $n+2=6k+3$, как делящееся на 3 и имеюшее только один простой делитель, должно быть вида 3^s, где s — натуральное число >2 (так как $6k+3=n+2>9$). При этом должно выполняться соотношение $3^s-2^m=1$. Но последнее уравнение имеет в натуральных числах s и m только два решения: $s=1$, $m=1$ и $s=2$, $m=3$ (см. задачу 155). Следовательно, случай $n=6k+1$ является невозможным.

Если $n=6k+2$, то должно быть: $n+1=6k+3=3^s$, где $s\geqslant2$, $n+2=6k+4=2^m$, где $m>3$, и $2^m-3^s=1$. Но уравнение $2^m-3^s=1$ имеет в

натуральных числах m и s только одно решение: $m=2$, $s=1$ (см. задачу **154**). Следовательно, и случай $n=6k+2$ является невозможным.

Наконец, если $n=6k+3$, то должно быть: $n=3^s$, где $s\geqslant 2$, $n+1=2^m$, где $m>3$, и $2^m-3^s=1$, что опять невозможно.

Таким образом, предположение, что для натуральных $n>7$ ни одно из чисел n, $n+1$ и $n+2$ не имеет двух или более различных простых делителей, приводит к противоречию.

Но для $n=7$ имеем $n+1=2^3$, $n+2=3^2$, и, значит, каждое из чисел n, $n+1$, $n+2$ имеет только по одному простому делителю.

б) Если k — натуральное число, то числа $6(6k+1)$ и $6(6k+5)$ имеют по крайней мере по три простых делителя, т. е. кроме 2 и 3, по крайней мере еще по одному простому делителю (так как числа $6k+1>1$ и $6k+5>1$ не делятся ни на 2, ни на 3). Объединяя в одну последовательность две прогрессии $36k+6$ и $36k+30$ ($k=1, 2, \ldots$) и приписав к ее началу число $30=2\cdot 3\cdot 5$, получим бесконечную последовательность 30, 42, 66, 78, 102, ..., $36k+6$, $36k+30$, ..., где разность двух последовательных членов равна 12 или 24 и где каждый из членов имеет по крайней мере три различных простых делителя.

101.

$$
\begin{aligned}
&n=33 && (n=3\cdot 11, && n+1=2\cdot 17, && n+2=5\cdot 7),\\
&n=85 && (n=5\cdot 17, && n+1=2\cdot 43, && n+2=3\cdot 29),\\
&n=93 && (n=3\cdot 31, && n+1=2\cdot 47, && n+2=5\cdot 19),\\
&n=141 && (n=3\cdot 47, && n+1=2\cdot 71, && n+2=11\cdot 13),\\
&n=201 && (n=3\cdot 67, && n+1=2\cdot 101, && n+2=7\cdot 29).
\end{aligned}
$$

Не существует четырех последовательных натуральных чисел, каждое из которых являлось бы произведением двух различных простых чисел, так как из четырех последовательных натуральных чисел одно всегда делится на 4. Примером четырех последовательных натуральных чисел, каждое из которых имеет точно два различных простых делителя, являются числа $33=3\cdot 11$, $34=2\cdot 17$, $35=5\cdot 7$, $36=2^2\cdot 3^2$.

Примечание. Мы не можем доказать, что существует бесконечно много натуральных чисел n, для которых каждое из чисел n, $n+1$, $n+2$ является произведением двух различных простых чисел, что, однако, вытекает из одной гипотезы Шинцеля о простых числах (см.: Acta Arithmetica, 4, 1958, стр. 197, следствие C_7).

102. Предположим, что существует бесконечно много натуральных чисел n, для которых каждое из чисел n и $n+1$ имеет только один простой делитель. Тогда, считая $n>1$ и учитывая, что одно из чисел n и $n+1$ является четным, а другое — нечетным, мы для некоторого нечетного простого числа p будем иметь $p^k-2^m=\pm 1$, где k и m являются натуральными числами, откуда $p^k=2^m\pm 1$.

Известно, что число Мерсенна >1 не может быть степенью натурального числа с показателем >1 (см.: W. Sierpiński. Teoria liczb,

Część II. Warszawa, 1959, стр. 374, упражнение 9); следовательно, если $p^k=2^m-1$, то $k=1$, т. е. $2^m-1=p$ есть простое число Мерсенна.

Если же $p^k=2^m+1$, то либо $k=1$, и тогда $p=2^m+1$ есть простое число Ферма, либо же $k>1$, и тогда $2^m=p^k-1=(p-1)(p^{k-1}+p^{k-2}+ + \ldots +1)$, причем $m>1$, откуда следует, что k должно быть четным числом, $k=2l$, где l — натуральное число, и, значит, $2^m=(p^l-1)(p^l+1)$.

Таким образом, числа p^l-1 и p^l+1, отличающиеся на 2, должны быть степенями 2. Поэтому $p^l-1=2$, $p^l+1=4$, следовательно, $p^l=3$, откуда $p=3$, $2^m=2\cdot 4=8$, значит, $m=3$, что дает $3^2=2^3+1$.

Итак, мы доказали, что если для $n>8$ числа n и $n+1$ имеют только по одному простому делителю, то либо n есть простое число Мерсенна, либо $n+1$ есть простое число Ферма. Наоборот, если $M_m=2^m-1$ есть простое число Мерсенна, то числа M_m и $M_m+1=2^m$ имеют только по одному простому делителю, если же $F_k=2^{2^k}+1$ есть простое число Ферма, то каждое из чисел $F_k-1=2^{2^k}$ и F_k имеют только по одному простому делителю. Отсюда вытекает справедливость нашей теоремы. Ср.: W. Sierpiński. Colloquium Mathematicum, 6, 1958, стр. 209.

Примечание. Пока мы знаем только 29 натуральных чисел n, для которых n и $n+1$ имеют по одному простому делителю. Пять наименьших из них: числа $n=2$, 3, 4, 7, 8, наибольшее же из них есть число $n=2^{11213}-1$.

103. Имеем $2^2-1=3$, $2^4-1=3\cdot 5$ и $2^{2k}-1=(2^k-1)(2^k+1)$. Если бы для $n=2k>4$ число $2^{2k}-1$ было бы произведением двух простых чисел, то числа 2^k-1 и 2^k+1 должны были бы быть простыми. Однако из трех чисел 2^k-1, 2^k и 2^k+1 одно (и притом не 2^k) кратно 3. А поскольку при $k>2$ оба числа 2^k-1 и 2^k+1 превосходят 3, то хотя бы одно из этих чисел — составное. Итак, для n четных >4 числа 2^n-1 являются произведениями по крайней мере трех натуральных чисел >1 [1].

Для n нечетных имеем $2^3-1=7$, $2^5-1=31$, $2^7-1=127$, $2^9-1=7\times 73$, $2^{11}-1=23\cdot 89$, $2^{13}-1=8191$ — простое число, $2^{15}-1=7\cdot 31\cdot 151$; числа $2^{17}-1$ и $2^{19}-1$, как известно, являются простыми, $2^{21}-1=7^2\cdot 127\cdot 337$, а $2^{23}-1$ есть уже число $>10^6$. Таким образом, мы обнаружили все числа вида 2^n-1, где $n=1, 2, 3, \ldots$, которые меньше 10^6 и которые являются произведениями двух простых чисел, а именно числа $2^4-1=3\cdot 5$, $2^9-1=7\cdot 73$ и $2^{11}-1=23\cdot 89$.

Примечание. Из чисел Мерсенна, больших миллиона, произведениями двух различных простых чисел являются числа $M_n=2^n-1$ для $n=23$, 37, 49, 67 и 101. Мы не знаем, является ли множество таких чисел конечным или бесконечным.

104. Так как $k\geqslant 3$, то $p_1p_2\ldots p_k\geqslant p_1p_2p_3=2\cdot 3\cdot 5>6$, и поэтому, согласно задаче **50**, $p_1p_2\ldots p_k=a+b$, где числа a и b оба >1,

[1] Приведенное рассуждение принадлежит переводчику. — *Прим. ред.*

взаимно просты и, следовательно, взаимно просты также с их суммой $p_1 p_2 \ldots p_k$. Числа a и b имеют различные простые делители; пусть $p|a$, $q|b$ и предположим, что $p<q$. Так как $(p, p_1p_2 \ldots p_k)=1$, то $p\geqslant p_{k+1}$, откуда, учитывая, что $q>p$, имеем $q\geqslant p_{k+2}$. Следовательно, так как $p+q\leqslant a+b$, то $p_{k+1}+p_{k+2}\leqslant p_1p_2 \ldots p_k$, ч. и т. д.

105. Пусть m — произвольное натуральное число >3 и n — натуральное число, такое, что $n>p_1 p_2 \ldots p_m$. Существует натуральное число $k\geqslant m\geqslant 4$, такое, что

$$p_1 p_2 \ldots p_k\leqslant n<p_1 p_2 \ldots p_k p_{k+1}. \quad (1)$$

Если бы было $q_n\geqslant p_{k+1}+1>p_{k+1}$, то по определению числа q_n каждое из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_{k+1}$ было бы делителем числа n, откуда $n\geqslant p_1p_2 \ldots p_kp_{k+1}$, что противоречит (1). Таким образом, $q_n<p_{k+1}+1<p_k+p_{k+1}$, а так как $k\geqslant 4$, то согласно задаче 104 $q_n<p_1p_2 \ldots p_{k-1}$, откуда в силу (1) получаем $\frac{q_n}{n}<\frac{1}{p_k}<\frac{1}{k}\leqslant\frac{1}{m}$. Итак, мы показали, что при любом натуральном $m>3$ для $n>p_1 p_2 \ldots p_m$ $\frac{q_n}{n}<\frac{1}{m}$, откуда следует, что отношение $\frac{q_n}{n}$ стремится к нулю, когда n неограниченно возрастает.

106. Пусть n — натуральное число >4. Тогда либо $n=2k$, где k — натуральное число >2, либо $n=2k+1$, где k — натуральное число >1. Если $n=2k$, $k>2$, то согласно теореме Чебышева существует простое число p, такое, что $k<p<2k$, причем так как $p>k>2$, то $p>2$. Отсюда $n=2k<2p<4k=2n$ и, так как $p>2$, $2p$ является произведением двух различных простых чисел и притом $n<2p<2n$. Если же $n=2k+1$, $k\geqslant 2$, то согласно теореме Чебышева существует простое число p, такое, что $k<p<2k$, откуда $3\leqslant k+1\leqslant p<2k$ и $n=2k+1<2k+2\leqslant 2p<4k<4k+2=2n$; следовательно, снова $n<2p<2n$ и $2p$ является произведением двух различных простых чисел.

Пусть теперь n означает натуральное число >15. Если $n=16$, $17, \ldots, 29$, то между n и $2n$ содержится число $30=2\cdot 3\cdot 5$. Таким образом, далее мы можем предполагать, что $n\geqslant 30$. Итак, имеем $n=6k+r$, где k — натуральное число $\geqslant 5$, r же есть остаток от деления n на 6, так что $0\leqslant r\leqslant 5$. Согласно теореме Чебышева существует простое число p, такое, что $k<p<2k$; следовательно, $p>5$, и $k+1\leqslant p<2k$, откуда $n=6k+r<6(k+1)\leqslant 2\cdot 3\cdot p<12k\leqslant 2n$, так что $n<2\cdot 3\cdot p<2n$ и $2\cdot 3\cdot p$ есть произведение трех различных простых чисел.

107. Пусть p_k — k-е по порядку простое число, s — данное натуральное число >1, n — натуральное число $>p_1 p_2 \ldots p_s$. Докажем, что между n и $2n$ содержится по крайней мере одно число, являющееся произведением s различных простых чисел.

Пусть $n=kp_1p_2\ldots p_{s-1}+r$, где r — остаток от деления числа n на $p_1p_2\ldots p_{s-1}$. Здесь $k>p_s$ (так как $n>p_1p_2\ldots p_s$) и $0\leqslant r<p_1p_2\ldots\ldots p_{s-1}$. Согласно теореме Чебышева существует простое число p, такое, что $k<p<2k$, откуда $p>p_s$ и $k+1\leqslant p<2k$, откуда $n=p_1p_2\ldots p_{s-1}k+ +r<p_1p_2\ldots p_{s-1}(k+1)\leqslant p_1p_2\ldots p_{s-1}p<2p_1p_2\ldots p_{s-1}k\leqslant 2n$, так что $n<p_1p_2\ldots p_{s-1}\,p<2n$, причем так как $p>p_s$, то $p_1p_2\ldots p_{s-1}\,p$ является произведением s различных простых чисел.

108. Легко проверить, что n-ым членом нашей последовательности является число $\frac{1}{3}(10^n-7)$. Имеем $10^2\equiv 15\equiv -2 \pmod{17}$, откуда $10^8\equiv 16\equiv -1 \pmod{17}$ и, значит, $10^9\equiv -10\equiv 7 \pmod{17}$, а так как $10^{16}\equiv 1 \pmod{17}$, то $10^{16k+9}\equiv 7 \pmod{17}$ для $k=0, 1, 2, \ldots$, следовательно, $17\,|\,\frac{1}{3}(10^{16k+9}-7)$. Отсюда заключаем, что числа $\frac{1}{3}(10^{16k+9}-7)$ для $k=0, 1, 2, \ldots$ являются составными (так как все они $\geqslant\frac{1}{3}(10^9-7)>17$). Монковский при помощи таблицы простых чисел установил, что числа $\frac{1}{3}(10^n-7)$ для $n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ и 8 являются простыми. Таким образом, наименьшим составным числом указанного вида является число $\frac{1}{3}\ (10^9-7)=333\,333\,331$.

Напрашивается вопрос, существуют ли другие составные числа указанного вида, кроме тех, которые мы нашли. Исходя из сравнения $10^2\equiv 5 \pmod{19}$, получим $10^4\equiv 25\equiv 6 \pmod{19}$ и $10^{12}\equiv 6^3\equiv 7 \pmod{19}$, а так как $10^{18k}\equiv 1 \pmod{19}$ для $k=0, 1, 2, \ldots$, то $19\,|\,\frac{1}{3}(10^{18k+12}-7)$ для $k=0, 1, 2, \ldots$. Таким образом, например, число $\frac{1}{3}(10^{12}-7)$ является составным.

Неизвестно, существуют ли другие простые числа рассматриваемого вида, кроме тех, которые были указаны выше, и имеется ли их бесконечно много.

109. Искомое число $n=5$, так как числа $1^4+2^4=17$, $2^4+3^4=97$, $3^4+4^4=337$ и $4^4+5^4=881$ являются простыми, а $5^4+6^4=1921=17\cdot 113$.

110. Таковы, например, все числа $10^{6k+4}+3$, где $k=0, 1, 2, \ldots$, так как все они кратны 7. Действительно, легко проверить, что $10^4\equiv 4 \pmod{7}$, а так как по малой теореме Ферма $10^6\equiv 1 \pmod{7}$, то (для натуральных k) $10^{6k+4}+3\equiv 10^4+3\equiv 4+3\equiv 0 \pmod{7}$.

Примечание. Неизвестно, существует ли среди чисел 10^n+3 (где $n=1, 2, \ldots$) бесконечно много простых. Простыми являются эти числа для $n=1$ и $n=2$, но при $n=3$ и $n=4$ они составные (так как $1003=17\cdot 59$ и $7\,|\,10^4+3$).

111. Из тождества (для натуральных n)

$$2^{4n+2}+1=(2^{2n+1}-2^{n+1}+1)(2^{2n+1}+2^{n+1}+1), \qquad (1)$$

замечания, что $5|2^2+1|2^{4n+2}+1$ и что для натуральных $n>1$ имеем $2^{2n+1}-2^{n+1}+1=2^{n+1}(2^n-1)+1\geqslant 2^3\cdot 3+1=25$, следует, что по крайней мере один из сомножителей правой части равенства (1) делится на 5 и при делении на 5 (в случае $n>1$) дает частное, большее единицы. Отсюда следует, что число $\frac{1}{5}(2^{4n+2}+1)$ для $n=2, 3, \ldots$ является произведением двух натуральных чисел >1 и, значит, есть число составное.

Ср.: Matematyka, 1957, № 3 (47), стр. 49, задача 501, и там же. 1958, № 4—6 (54), стр. 72—73.

112. Пусть m — произвольное натуральное число >1 и пусть $n=m!+k$, где $k=2, 3, \ldots, m$. Так как здесь $k<m!+k$ и $k|m!+k$, то $2^k-1<2^{m!+k}-1$ и $2^k-1|2^{m!+k}-1$ и, значит, числа $2^{m!+k}-1$ будут составными для $k=2, 3, \ldots, m$. Таким образом, мы имеем отрезок последовательности 2^n-1, состоящий из $m-1$ составных чисел.

113. Возьмем, например, число 200. Чтобы получить из него простое число, необходимо в нем изменить последнюю цифру на нечетную. Но $3|201$, $7|203$, $5|205$, $3|207$ и $11|209$. Таким образом, изменением только одной цифры из числа 200 нельзя получить простое число.

Примечание. Неизвестно, можно ли получить простое число из каждого натурального числа посредством изменения двух его цифр.

Зато легко доказать, что существует бесконечно много натуральных чисел n, таких, что изменением одной (какой-либо) цифры числа n (записанного в десятичной системе счисления) нельзя получить из него простое число. Таковы, например, числа $n=2310k-210$, где $k=1, 2, 3, \ldots$, так как в этом случае нужно было бы изменить последнюю цифру числа n (т. е. нуль), очевидно, на одну из цифр: 1, 3, 7 или 9; при этом, как легко проверить, $11|n+1$, $3|n+3$, $7|n+7$, $3|n+9$ и, таким образом, при изменении одной цифры числа n мы всегда получаем составное число.

114. Предположим, что теорема *Ч* справедлива. Теорема *T*, очевидно, справедлива для $n=2$ и $n=3$. Итак, предположим, что n есть натуральное число >3. Если n — четное число, $n=2k$, то, так как $n>3$, имеем $k>1$ и согласно теореме *Ч* существует простое число p, такое, что $k<p<2k$, откуда $p<n<2p$ и, значит, p является делителем только одного сомножителя p произведения $n!=1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$.

Если же $n=2k+1$, где k — натуральное число >1 (так как $n>3$), то согласно теореме *Ч* существует простое число p, такое, что $k<p<2k<n$, откуда $k+1\leqslant p$; следовательно, $2k+1<2p$ и $p<n<2p$ и, как и выше, заключаем, что p входит в разложение числа $n!$ на простые сомножители с показателем 1. Таким образом, мы доказали, что из теоремы *Ч* вытекает теорема *T*.

Предположим теперь, что теорема *T* справедлива и пусть n — натуральное число >1. Согласно теореме *T* существует простое число p, входящее в разложение числа $(2n)!$ на простые сомножители с показа-

телем 1. Итак, имеем $p<2n<2p$ (так как если бы было $2p\leqslant 2n$, то в произведение $(2n)!=1\cdot 2\cdot\ \ldots\ \cdot(2n-1)\cdot 2n$ входили бы сомножители p и $2p$ и, следовательно, число p входило бы в разложение этого произведения на простые сомножители с показателем $\geqslant 2$ вопреки теореме T). Отсюда $n<p<2n$. Таким образом, из теоремы T вытекает теорема $Ч$. Теоремы $Ч$ и T равносильны.

115. В разложении числа 11! на простые сомножители числа 7 и 11, очевидно, содержатся в первых степенях. Следовательно, далее мы можем предполагать, что $n>11$, так что, как в случае $n=2k$, так и в случае $n=2k+1$, будет $k>5$ и, значит, согласно теореме, сформулированной в условии задачи, существуют два различных простых числа p и $q>p$, такие, что $k<p<q<2k$. Отсюда в каждом случае имеем $p<q<n$ и $p\geqslant k+1$ и, значит, в каждом случае $2q>2p>n$, на основании чего заключаем, что как простое число p, так и простое число q входит в разложение числа $n!$ на простые сомножители с показателем 1.

Что же касается числа 10!, то в его разложение на простые сомножители входит с показателем 1 только простое число 7.

116. Пусть n — данное натуральное число. Согласно теореме Дирихле об арифметической прогрессии существует простое число вида $p=6^nk+2\cdot 3^{2^{n-1}}-1$, где k — натуральное число. Отсюда (так как $2^{n-1}\geqslant n$ для натуральных n) $3^n|p+1$ и число $p+1$ имеет более чем n различных натуральных делителей (например, числа 1, 3, 3^2, ..., 3^n). Согласно же теореме Эйлера имеем $3^{\varphi(2^n)}\equiv 1 \pmod{2^n}$, откуда $2^n|3^{2^{n-1}}-1$ и, значит, $2^n|p-1$ и число $p-1$ имеет более чем n различных натуральных делителей (например, числа 1, 2, 2^2, ..., 2^n).

117*. Пусть n — данное натуральное число, а p_i — i-е по порядку простое число. На основании китайской теоремы об остатках существует натуральное число b, такое, что $b\equiv 1 \pmod{p_1p_2\ldots p_n}$, $b\equiv -1 \pmod{p_{n+1}p_{n+2}\ldots p_{2n}}$ и $b\equiv -2 \pmod{p_{2n+1}p_{2n+2}\ldots p_{3n}}$. Так как $(b, p_1p_2\ldots p_{3n})=1$, то согласно теореме Дирихле существует натуральное число k, такое, что число $p=p_1p_2\ldots p_{3n}k+b$ является простым. В таком случае $p_i|b-1$ для $i=1, 2, \ldots, n$; следовательно, $p_i|p-1$ для $i=1, 2, \ldots, n$ и $p_i|b+1$ для $i=n+1, n+2, \ldots, 2n$, откуда $p_i|p+1$ для $i=n+1, n+2, \ldots, 2n$ и аналогично $p_i|p+2$ для $i=2n+1, 2n+2, \ldots, 3n$. Таким образом, каждое из чисел $p-1$, $p+1$ и $p+2$ имеет по меньшей мере n различных простых делителей.

118. Если при натуральном m число $m!$ делится на простое число p, то p должно быть делителем по крайней мере одного из сомножителей произведения $m!=1\cdot 2\cdot\ \ldots\ \cdot m$ и, значит, $p\leqslant m$. Поэтому если число $m!$ делится на натуральное число $a>m$, то a должно быть составным числом. Таким образом, если бы при натуральном $n>1$ число $(n-1)!$ делилось бы на n или на $n+2$, то число n или $n+2$ было бы составным. Следовательно, условие задачи является необходимым.

Предположим теперь, что для данного нечетного числа $n>1$ число $(n-1)!$ не делится ни на n, ни на $n+2$.

Докажем, что числа n и $n+2$ будут простыми. Здесь достаточно предположить, что $n\geqslant 7$, так как для $n=3$ и для $n=5$ числа n и $n+2$ оба являются простыми. Если бы n было составным числом, было бы $n=ab$, где a и b — натуральные числа $<n$ и, значит, $a\leqslant n-1$ и $b\leqslant n-1$, т. е. числа a и b были бы сомножителями произведения $1\cdot 2\cdot\ \ldots\ \times(n-1)=(n-1)!$. Отсюда в случае $a\neq b$ мы имели бы $n=ab\,|\,(n-1)!$, что противоречит предположению. В случае $a=b$ было бы $n=a^2$ и так как n — нечетное число >1, то $a\geqslant 3$, следовательно, $n=a^2\geqslant 3a>2a$, откуда $2a\leqslant n-1$. Таким образом, числа a и $2a$ являются различными сомножителями произведения $(n-1)!=1\cdot 2\cdot\ \ldots\ \cdot(n-1)$, откуда $n=a^2\,|\,(n-1)!$ вопреки предположению. Итак, число n простое.

Если бы число $n+2$ было составным, было бы $n+2=ab$, где a и b — натуральные числа >1 и ввиду нечетности числа n нечетные, следовательно, $\geqslant 3$, откуда, так как $n\geqslant 7$, $a\leqslant\frac{n+2}{3}\leqslant\frac{n-1}{2}$.

Итак, $2a\leqslant n-1$; подобным же образом найдем, что $2b\leqslant n-1$. Если a и b — различные числа, то они являются различными сомножителями произведения $1\cdot 2\cdot\ \ldots\ \cdot(n-1)=(n-1)!$, откуда вопреки предположению $n+2=ab\,|\,(n-1)!$. Если же $a=b$, то a и $2b$ являются различными сомножителями произведения $(n-1)!$, откуда снова вопреки предположению $n+2\,|\,2ab\,|\,(n-1)!$.

Таким образом, условие задачи является достаточным.

119. Пусть m — данное натуральное число. Так как $(10^m, 10^m-1)=1$, то на основании теоремы Дирихле об арифметической прогрессии существует такое натуральное число k, что число $p=10^m k+10^m-1$ есть простое число. Так как все m последних цифр числа p, очевидно, равны 9, то отсюда следует, что сумма всех цифр числа p больше m.

Примечание. А. Монковский заметил, что теорема остается справедливой в любой системе счисления с натуральным основанием $q>1$; чтобы убедиться в этом, достаточно в изложенном выше доказательстве заменить число 10 числом q.

Ср. W. Sierpiński. Sur la somme des chiffres des nombres premiers, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, ser. II, Tom X, 1961; P. Erdös. On a problem of Sierpiński, Atti Acad. Nacionale dei Lincei, vol. 33, 1962, стр. 122—124.

Мы не знаем, возрастает ли неограниченно сумма цифр простого числа вместе с самим числом.

120. Пусть m — данное натуральное число. Так как $(10^{m+1}, 1)=1$, то на основании теоремы Дирихле об арифметической прогрессии существует натуральное число k, такое, что число $p=10^{m+1}k+1$ простое. Последними $m+1$ цифрами числа p, как легко заметить, являются m нулей и на конце единица. Таким образом, в записи простого числа p в десятичной системе счисления имеется по крайней мере m нулей, ч. и т. д.

Ср.: Matematyka, № 3 (73), стр. 130.

Примечание. Неизвестно, существует ли для каждого натурального числа m такое простое число, запись которого в десятичной системе счисления имеет в точности m нулей. Для $m=1$ наименьшим таким простым числом является 101, для $m=2$ таковым является 1009.

121. Если p есть простое число, то сумма всех натуральных делителей числа p^4 есть $1+p+p^2+p^3+p^4$. Если $1+p+p^2+p^3+p^4=n^2$, где n — натуральное число, то, как легко проверить, выполняются неравенства

$$(2p^2+p)^2<(2n)^2<(2p^2+p+2)^2,$$

из которых вытекает, что $(2n)^2=(2p^2+p+1)^2$, т. е. $4n^2=4p^4+4p^3+5p^2+$ $+2p+1$, а так как $4n^2=4(p^4+p^3+p^2+p+1)$, то должно быть p^2-2p- $-3=0$, откуда $p|3$; следовательно, $p=3$. Действительно, для $p=3$ имеем $1+3+3^2+3^3+3^4=11^2$. Таким образом, существует только одно простое число $p=3$, удовлетворяющее условию задачи.

Ср.: Matematyka, 1958, № 3 (53), стр. 55, задача 482.

122. Простое число p имеет только два натуральных делителя: 1 и p. Следовательно, если сумма всех натуральных делителей простого числа p есть s-я степень натурального числа n, то $1+p=n^s$, откуда $p=n^s-1=$ $=(n-1)(n^{s-1}+n^{s-2}+\ \dots\ +1)$. Здесь $n>1$ и для $s\geqslant 2$ первый сомножитель правой части последнего равенства меньше, чем второй сомножитель. Таким образом, здесь мы имеем разложение простого числа p на произведение двух натуральных сомножителей, первый из которых меньше второго.

Отсюда следует, что первым сомножителем является 1, т. е. $n-1=1$; следовательно, $n=2$ и $p=2^s-1$. Таким образом, для каждого натурального $s\geqslant 2$ существует не более чем одно простое число, удовлетворяющее условию задачи, и такое число существует тогда и только тогда, когда число 2^s-1 является простым. Для $s=2$ это будет число 3, для $s=3$ — число 7, для $s=5$ — число 31, для $s=7$ — число 127, а для $s=4$, 6, 8 и 10 таких простых чисел нет, так как числа $2^4-1=3\cdot 5$, $2^6-1=3^2\cdot 7$, $2^8-1=3\cdot 5\cdot 17$, $2^{10}-1=3\cdot 11\cdot 31$ являются составными.

123. Для простых чисел $p>5$ имеем:

$$2<\frac{p-1}{2}<p-1,$$

откуда

$$(p-1)^2=2\cdot\frac{p-1}{2}(p-1)\,|\,(p-1)!.$$

Допустим, что для простого числа $p>5$ при некотором натуральном m имеет место равенство

$$(p-1)!+1=p^m; \tag{1}$$

тогда

$$(p-1)^2|p^m-1,$$

откуда, разделив оба числа на $p-1$, найдем, что

$$p-1 \mid p^{m-1}+p^{m-2}+\ \dots\ +p+1. \tag{2}$$

Но $p-1 \mid p^k-1$; следовательно, $p^k \equiv 1 \pmod{p-1}$ для $k=0, 1, 2, \dots$, откуда $p^{m-1}+p^{m-2}+\ \dots\ +p+1 \equiv m \pmod{p-1}$. Теперь в силу (2) имеем $p-1 \mid m$, откуда $m \geqslant p-1$; следовательно,

$$p^m \geqslant p^{p-1} > (p-1)^{p-1} > (p-1)!,$$

откуда $p^m > (p-1)!+1$, что противоречит нашему предположению (1).

124. Согласно теореме Лиувилля (см. задачу **123**), если p — простое число >5, то при натуральном m невозможно равенство $(p-1)!+1=p^m$. Нечетное число $(p-1)!+1>1$ и, значит, имеет простой нечетный делитель $q \neq p$. Из соотношения $q \mid (p-1)!+1$ следует, что $q>p-1$ и поэтому (так как $q \neq p$) $q>p$. Теперь, учитывая, что p может быть произвольно большим простым числом, мы можем заключить, что простых чисел q, для которых при некотором $p<q$ $q \mid (p-1)!+1$, существует бесконечно много.

125*. Приведем здесь доказательство А. Шинцеля.

Пусть a — произвольное натуральное число, k — целое число $\neq 1$. Пусть $k-1=2^s h$, где 2^s есть наивысшая степень двойки, делящая $k-1$, и h — нечетное число, положительное или отрицательное. Выберем натуральное число m так, чтобы выполнялось неравенство $2^{2^m}>a-k$, и пусть l — натуральное число, такое, что $l \geqslant s$ и $l \geqslant m$. Если бы число $2^{2^l}+k \geqslant 2^{2^m}+k>a$ было составным, то мы имели бы составное число заданного вида $>a$. Итак, предположим, что число $p=2^{2^l}+k$ является простым. Так как $l \geqslant s$ и $k-1=2^s h$, то $p-1=2^{2^l}+k-1=2^s h_1$, где h_1 есть нечетное число >0.

На основании теоремы Эйлера $2^{\varphi(h_1)} \equiv 1 \pmod{h_1}$ и, значит (так как $p-1=2^s h_1$), $2^{s+\varphi(h_1)} \equiv 2^s \pmod{p-1}$, откуда, учитывая, что $l \geqslant s$, получаем $2^{l+\varphi(h_1)} \equiv 2^l \pmod{p-1}$.

Далее, на основании малой теоремы Ферма

$$2^{2^{l+\varphi(h_1)}}+k \equiv 2^{2^l}+k \equiv 0 \pmod{p}$$

и так как $2^{l+\varphi(h_1)}>2^l$, то $2^{2^{l+\varphi(h_1)}}+k>2^{2^l}+k=p$ и число $2^{2^{l+\varphi(h_1)}}+k$ есть составное $>a$, так как $p=2^{2^l}+k \geqslant 2^{2^m}+k>a$.

Теорема доказана. Аналогичную теорему для $k=1$ мы не в состоянии доказать, так что мы не знаем, существует ли бесконечно много составных чисел Ферма.

Заметим здесь, что предложение, более слабое, чем доказанное выше, а именно, что для каждого целого числа k существует по крайней мере одно натуральное число n, такое, что число $2^{2^n}+k$ является составным, было установлено в 1943 г. И. Рейнером как частный случай одной

довольно сложной теоремы (см.: American Mathematical Monthl, **50**, стр. 619—621). Чтобы это слабое предложение получить из нашего, достаточно (для $k=1$) заметить, что число $2^{2^5}+1$ является составным, делящимся на 641.

126. Таковы, например, все числа $k=6t-1$, где $t=1, 2, \ldots$, так как для каждого натурального числа n число 2^{2^n} при делении на 3 дает в остатке 1; следовательно, число $2^{2^n}+k=2^{2^n}-1+6t$, будучи кратным 3 и >3, является составным.

127. а) При натуральном n число $2^{2n}-1$ делится на 3, поэтому число $2^{2n+1}-2=2(2^{2n}-1)$ делится на 6 и, значит, $2^{2n+1}=6k+2$, где k — натуральное число. Отсюда $2^{2^{2n+1}}+3=(2^6)^k\cdot 2^2+3\equiv 2^2+3\equiv 0 \pmod 7$, так что $7|2^{2^{2n+1}}+3$ для $n=1, 2, \ldots$, причем $2^{2^{2n+1}}+3\geqslant 2^{2^3}+3>7$. Таким образом, числа $2^{2^{2n+1}}+3$ являются составными для $n=1, 2, \ldots$

б) При натуральном n $2^{4n}-1=16^n-1\equiv 0 \pmod 5$, откуда $10|2^{4n+1}-2$. Итак, $2^{4n+1}=10k+2$, где k — натуральное число, и поэтому $2^{2^{4n+1}}+7\equiv(2^{10})^k 2^2+7\equiv 2^2+7\equiv 0 \pmod{11}$. Таким образом, $11|2^{2^{4n+1}}+7$, причем $2^{2^{4n+1}}+7\geqslant 2^{2^5}+7>11$. Следовательно, числа $2^{2^{4n+1}}+7$ для $n=1, 2, \ldots$ все составные.

в) При натуральном n имеем $2^{6n}=(2^6)^n\equiv 1 \pmod 7$, т. е. $7|2^{6n}-1$ и $28|2^{6n+2}-2^2$, откуда $2^{6n+2}=28k+4$, где k — натуральное число. Отсюда $2^{2^{6n+2}}=(2^{28})^k\cdot 2^4\equiv 16 \pmod{29}$; следовательно, $29|2^{2^{6n+2}}+13$, причем $2^{2^{6n+2}}+13\geqslant 2^{2^8}+13>29$, так что числа $2^{2^{6n+2}}+13$ являются составными для $n=1, 2, \ldots$.

г) При натуральном n $(2^{10})^n\equiv 1 \pmod{11}$, откуда $22|2^{10n+1}-2$ и поэтому $2^{10n+1}=22k+2$, где k — натуральное число. Отсюда $2^{2^{10n+1}}=(2^{22})^k 2^2\equiv 4 \pmod{23}$ и, значит, $23|2^{2^{10n+1}}+19$, а так как $2^{2^{10n+1}}+19>23$ для $n=1, 2, \ldots$, то числа $2^{2^{10n+1}}+19$ для $n=1, 2, \ldots$ все составные.

д) При натуральном n $2^{6n}=(2^3)^{2n}\equiv(-1)^{2n}\equiv 1 \pmod 9$, откуда $9|2^{6n}-1$ и $36|2^{6n+2}-2^2$, так что $2^{8n+2}=36k+4$, где k — натуральное число. Следовательно, $2^{2^{6n+2}}=(2^{36})^k\cdot 16\equiv 16 \pmod{37}$, $37|2^{2^{6n+2}}+21$, причем $2^{2^{6n+2}}+21>37$ для $n=1, 2, \ldots$ и, значит, числа $2^{2^{6n+2}}+21$ для $n=1, 2, \ldots$ все составные.

Примечание. Ни для одного целого значения k мы не в состоянии доказать, что среди чисел $2^{2^n}+k$ $(n=1, 2, \ldots)$ имеется бесконечно много простых.

128*. Как известно, числа $F_m=2^{2^m}+1$ являются простыми для $m=0, 1, 2, 3, 4$, число же $F_5=641\cdot p$, где p — простое число $>2^{16}+1=F_4$. Кроме того, так как $p|F_5$, то $(p, F_5-2)=1$, т. е. $(p, 2^{32}-1)=1$.

Согласно китайской теореме об остатках существует бесконечно много натуральных чисел k, удовлетворяющих сравнениям

$$k \equiv 1 [\mathrm{mod}\ (2^{32}-1)\cdot 641] \text{ и } k \equiv -1 \ (\mathrm{mod}\ p). \qquad (1)$$

Докажем, что если k есть натуральное число $>p$, удовлетворяющее сравнениям (1), то числа $k\cdot 2^n+1$ $(n=1, 2, \ldots)$ все составные.

Число n мы можем представить в виде $n=2^m(2t+1)$, где m и t — целые числа $\geqslant 0$. Пусть вначале m — одно из чисел 0, 1, 2, 3 или 4. На основании первого из сравнений (1) имеем:

$$k\cdot 2^n+1 \equiv 2^{2^{m}(2t+1)}+1 [\mathrm{mod}(2^{32}-1)]. \qquad (2)$$

Так как для $m=0, 1, 2, 3$ и 4 $F_m|2^{32}-1$ и $F_m|2^{2^m(2t+1)}+1$, то согласно (2) $F_m|k\cdot 2^n+1$, а значит, ввиду $k\cdot 2^n+1>k>p>F_4$, число $k\cdot 2^n+1$ является составным.

Остается рассмотреть случай, когда $m\geqslant 6$. Теперь $2^6|n$, следовательно, $n=2^6\cdot h$, где h — натуральное число. На основании второго из сравнений (1) имеем $k\cdot 2^n+1\equiv -2^{2^6\cdot h}+1$ $(\mathrm{mod}\ p)$, а так как $p|2^{2^5}+1|2^{\ 2}-$ $-1|2^{2^6\cdot h}-1$, то $p|k\cdot 2^n+1$ и, следовательно, в силу $k\cdot 2^n+1>k>p$, число $k\cdot 2^n+1$ является составным.

Итак, числа $k\cdot 2^n+1$ являются составными для $n=1, 2, 3, \ldots$, ч. и т. д. Ср. W. Sierpiński. Sur un problème concernant les nombres $k\cdot 2^n+1$, Elemente der Mathematik, XV, 1960, стр. 73—74 [8].

Примечание. Мы не знаем, каково наименьшее натуральное число k, для которого каждое из чисел $k\cdot 2^n+1$ $(n=1, 2, \ldots)$ является составным.

129*. Прежде всего заметим, что в доказательстве, рассмотренном в задаче 128*, можно было к сравнениям (1) добавить сравнение $k\equiv 1$ $(\mathrm{mod}\ 2)$, так что получилась бы следующая теорема T: существует бесконечно много нечетных чисел $k>p$, таких, что каждое из чисел $k\cdot 2^l+1$, где $l=1, 2, \ldots$, делится по крайней мере на одно из шести простых чисел

$$F_0,\ F_1,\ F_2,\ F_3,\ F_4 \text{ и } p \qquad (3)$$

(где $p>F_4$). Обозначим через Q произведение всех шести чисел (3).

Так как это нечетное число, то $2^{\varphi(Q)}\equiv 1$ $(\mathrm{mod}\ Q)$ и тем более $2^{\varphi(Q)}\equiv$ $\equiv 1$ $(\mathrm{mod}\ q)$, где q означает любое из чисел (3). Пусть n — произвольное натуральное число. Согласно теореме T (для $l=n[\varphi(Q)-1]$) число $k\cdot 2^{n[\varphi(Q)-1]}+1$ делится по крайней мере на одно из чисел (3); назовем его q. Таким образом, $k\cdot 2^{n[\varphi(Q)-1]}+1\equiv 0$ $(\mathrm{mod}\ q)$, откуда, умножив обе части сравнения на 2^n, получим $k\cdot 2^{n\varphi(Q)}+2^n\equiv 0$ $(\mathrm{mod}\ q)$. Отсюда, учитывая, что $2^{\varphi(Q)}\equiv 1$ $(\mathrm{mod}\ q)$ и, значит, $2^{n\varphi(Q)}\equiv 1$ $(\mathrm{mod}\ q)$, найдем, что $k+2^n\equiv 0$ $(\mathrm{mod}\ q)$, а так как $k>p$ и, следовательно, $k>q$ и $k+2^n>q$, то из последнего сравнения видно, что $k+2^n$ есть составное число.

Итак, существует бесконечно много нечетных натуральных чисел k, для которых числа 2^n+k, где $n=1, 2, \ldots$, все являются составными.

130. Пусть $k=2^m$, где m — натуральное число, и пусть $m=2^s \cdot h$, где s — целое число $\geqslant 0$ и h —нечетное число. Тогда $k \cdot 2^{2^n}+1=2^{2^s(2^{n-s}+h)}+1$ и так как для $n>s$ число $2^{n-s}+h$ есть нечетное натуральное, то $2^{2^s}+1 \mid k \cdot 2^{2^n}+1$; следовательно, поскольку для $n>s$ $k \cdot 2^{2^n}+1>2^{2^s}+1$, число $k \cdot 2^{2^n}+1$ при $n>s$ является составным (делящимся на $2^{2^s}+1$).

В частности, если k есть степень двойки с нечетным показателем, то все числа $k \cdot 2^{2^n}+1$, где $n=1, 2, \ldots$, делятся на 3.

131. Для $k=1$ $n=5$, так как числа $2^{2^n}+1$ являются простыми для $n=1, 2, 3, 4$ и $641 \mid 2^{2^5}+1$, т. е. $2^{2^5}+1$ есть составное число.

Для $k=2$ $n=1$, так как $3 \mid 2 \cdot 2^2+1$.

Для $k=3$ $n=2$, так как число $3 \cdot 2^2+1$ простое и $7 \mid 3 \cdot 2^{2^2}+1=49$.

Для $k=4$ $n=2$, так как $4 \cdot 2^2+1=17$ простое и $5 \mid 4 \cdot 2^{2^2}+1$.

Для $k=5$ $n=1$, так как $3 \mid 5 \cdot 2^2+1$.

Для $k=6$ $n=1$, так как $5 \mid 6 \cdot 2^2+1$.

Для $k=7$ $n=3$, так как $7 \cdot 2^2+1=29$ и $7 \cdot 2^{2^2}+1=113$ являются простыми числами и $11 \mid 7 \cdot 2^{2^3}+1$.

Для $k=8$ $n=1$, так как $3 \mid 8 \cdot 2^2+1$.

Для $k=9$ $n=2$, так как $9 \cdot 2^2+1=37$ — простое число и $5 \mid 9 \cdot 2^{2^2}+1$.

Для $k=10$ $n=2$, так как $10 \cdot 2^2+1=41$ — простое число и $7 \mid 10 \cdot 2^{2^2}+1$.

132. Из решения задачи **131** следует, что числа $k=1, 3, 4, 7, 9$, и 10 не удовлетворяют поставленному условию. Не удовлетворяет ему и число 6, так как $6 \cdot 2^{2^2}+1=97$ есть простое число. Зато числа $2 \cdot 2^{2^n}+1$, $5 \cdot 2^{2^n}+1$ и $8 \cdot 2^{2^n}+1$ для $n=1, 2, \ldots$ являются составными, так как все они делятся на 3 и больше чем 3.

Примечание. Если $k=3t+2$, где $t=0, 1, 2, \ldots$, то все числа $k \cdot 2^{2^n}+1$ ($n=1, 2, \ldots$) делятся на 3 и составные.

133. Числа $\frac{1}{3}(2^{2^{n+1}}+2^{2^n}+1)$ для $n=1, 2, \ldots$ являются натуральными.

Если n — четное число, то $2^n \equiv 1 \pmod 3$, так что $2^n=3k+1$, где k — натуральное число, откуда $2^{2^n}=(2^3)^k \cdot 2=8^k \cdot 2 \equiv 2 \pmod 7$; следовательно, $2^{2^{n+1}}=(2^{2^n})^2 \equiv 4 \pmod 7$, откуда $2^{2^{n+1}}+2^{2^n}+1 \equiv 4+2+1 \equiv 0 \pmod 7$. Если же n — нечетное, то $2^n \equiv 2 \pmod 3$, значит, $2^n=3k+2$, где k — целое число $\geqslant 0$, откуда $2^{2^n}=2^{3k+2}=8^k \cdot 4 \equiv 4 \pmod 7$ и $2^{2^{n+1}}=(2^{2^n})^2 \equiv 4^2 \equiv 2 \pmod 7$, так что $2^{2^{n+1}}+2^{2^n}+1 \equiv 2+4+1 \equiv 0 \pmod 7$.

Итак, числа $\frac{1}{3}(2^{2^{n+1}}+2^{2^n}+1)$ для натуральных n делятся на 7, а так как для натуральных $n>1$ они $\geqslant\frac{1}{3}(2^{2^3}+2^{2^2}+1)=91>7$, то для $n=2, 3, \ldots$ они составные.

Ср. с теоремой Михаила Штифеля (XVI в.); см.: Elemente der Mathematik, 18, 1963, стр. 18.

134. Таковы, например, все числа данной в условии последовательности, для которых $n=28k+1$, $k=1, 2, 3, \ldots$.

В самом деле, на основании малой теоремы Ферма имеем $2^{28}\equiv 1 \pmod{29}$, откуда для $k=1, 2, \ldots$ $2^{2\cdot 28k}\equiv 1 \pmod{29}$; следовательно, для $n=28k+1$ имеем $(2^{2n}+1)^2+2^2\equiv 25+4\equiv 0 \pmod{29}$, т. е. $29\mid(2^{2n}+1)^2+2^2$, причем поскольку для натурального k число $n=28k+1\geqslant 29$, то $(2^{2n}+1)^2+2^2>29$. Отсюда следует, что числа $(2^{2n}+1)^2+2^2$ для $n=28k+1$, где $k=1, 2, \ldots$, все составные.

135*. В случае a нечетного >1 числа $a^{2^n}+1$ $(n=1, 2, \ldots)$ как четные >2 все составные; таким образом, мы можем предположить, что a есть четное число. Имеем $641\mid 2^{2^5}+1$, следовательно, также $641\mid 4^{2^4}+1$, $641\mid 16^{2^3}+1$. Далее, легко докажем, что $17\mid 2^{2^2}+1$, $17\mid 4^2+1$, $17\mid 6^{2^3}+1$, $17\mid 8^{2^2}+1$, $17\mid 10^{2^3}+1$, $17\mid 12^{2^3}+1$, $17\mid 14^{2^3}+1$, $17\mid 20^{2^3}+1$, $17\mid 22^{2^3}+1$, $17\mid 24^{2^3}+1$, $17\mid 26^{2^2}+1$, $17\mid 28^{2^3}+1$, $17\mid 30^2+1$, $17\mid 32^{2^2}+1$.

Чтобы, например, доказать, что $17\mid 28^{2^3}+1$, исходим из сравнения $28\equiv 11 \pmod{17}$, откуда $28^2\equiv 121\equiv 2 \pmod{17}$, что дает $28^{2^3}\equiv 2^{2^2}\equiv -1 \pmod{17}$, так что $17\mid 28^{2^3}+1$.

На основании полученных результатов для $k=0, 1, 2, \ldots$ имеем: $17\mid(34k+2)^{2^2}+1$, $17\mid(34k+4)^2+1$, $17\mid(34k+6)^{2^3}+1$, $17\mid(34k+8)^{2^2}+1$, $17\mid(34k+10)^{2^3}+1$, $17\mid(34k+12)^{2^3}+1$, $17\mid(34k+14)^{2^3}+1$, $17\mid(34k+20)^{2^3}+1$, $17\mid(34k+22)^{2^3}+1$, $17\mid(34k+24)^{2^3}+1$, $17\mid(34k+26)^{2^2}+1$, $17\mid(34k+28)^{2^3}+1$, $17\mid(34k+30)^2+1$, $17\mid(34k+32)^{2^2}+1$.

Теперь, принимая во внимание, что $5\mid 18^2+1$ и что $13\mid 34^2+1$, мы можем заключить, что для каждого натурального числа $a\leqslant 100$, за исключением, быть может, чисел 50, 52, 68, 84 и 86, существует натуральное число $n\leqslant 5$, для которого число $a^{2^n}+1$ является составным.

Но $50^2+1=2501=41\cdot 61$, $5\mid 52^2+1$, $5\mid 68^2+1$, $257\mid 84^{2^6}+1$ и $13\mid 86^2+1$. Таким образом, для каждого натурального числа $a\leqslant 100$ существует натуральное число $n\leqslant 6$, такое, что число $a^{2^n}+1$ является составным.

Примечание. А. Шинцель доказал, что для каждого натурального числа a, такого, что $1<a<2^{2^7}$, существует натуральное число n, такое, что число $a^{2^n}+1$ является составным (см. Colloquium Mathematicum, X, 1963, стр. 137—138).

Неизвестно, для каждого ли натурального числа $a>1$ существует натуральное число n, такое, что число $a^{2^n}+1$ является составным; мы не в состоянии разрешить этот вопрос, например, для числа $a=2^{2^{1945}}$.

Но мы в состоянии доказать, что для $a=2^{2^{1944}}$ число a^2+1 является составным, и даже знаем его наименьший простой делитель: $5\cdot 2^{1947}+1$. См.: В. Серпинский. Что мы знаем и чего не знаем о простых числах. Физматгиз, 1963, стр. 67.

136. Каждое простое число >5 имеет вид $30k+r$, где k — целое число $\geqslant 0$, r же есть одно из чисел 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23 или 29. Так как простых чисел существует бесконечно много, то по крайней мере для одного из указанных восьми значений r существует бесконечно много простых чисел вида $30k+r$, где k — натуральное число. Таким образом, достаточно рассмотреть восемь следующих случаев.

1. Существует бесконечно много простых чисел вида $30k+1$. Пусть p — одно из них и пусть $n=7+19+p$; n — нечетное составное число, так как $n=7+19+30k+1=3(10k+9)$. Число n есть сумма трех различных простых чисел (так как $p=30k+1$ — простое число, отличное от 7 и 19) и n не является суммой двух простых чисел, так как одно из них должно было бы быть четным, т. е. числом 2, и, значит, было бы $n=30k+27=$ $=q+2$, где $q=5(6k+5)$, что невозможно.

2. Существует бесконечно много простых чисел вида $30k+7$. Пусть $p>7$ есть одно из них и пусть $n=7+13+p$; n — нечетное составное число, так как $n=30k+27=3(10k+9)$. Оно представляет собой сумму трех различных простых чисел, так как $p\geqslant 37$, и, наконец, число n удовлетворяет заданным условиям, так как $n-2=30k+25=5(6k+5)$.

3. Существует бесконечно много простых чисел вида $30k+11$. Пусть $p>11$ есть одно из них и пусть $n=11+13+p$; n — нечетное число, являющееся суммой трех различных простых чисел. Число n удовлетворяет заданным условиям, так как $n=30k+35=5(6k+7)$ и $n-2=$ $=3(30k+11)$.

4. Существует бесконечно много простых чисел вида $30k+13$. Пусть p — одно из них. Тогда $n=3+11+p$ есть нечетное число, являющееся суммой трех различных простых чисел. Число n удовлетворяет заданным условиям, так как $n=3(10k+9)$ и $n-2=5(6k+5)$.

5. Существует бесконечно много простых чисел вида $30k+17$. Пусть p — одно из них и пусть $n=3+7+p$. Так как $p=3(10k+9)$ и $n-2=$ $=5(6k+5)$, то число n удовлетворяет заданным условиям.

6. Существует бесконечно много простых чисел вида $30k+19$. Пусть p — одно из них и пусть $n=3+5+p$. Так же, как и в предыдущем случае, заключаем, что число n удовлетворяет заданным условиям.

7. Существует бесконечно много простых чисел вида $30k+23$. Пусть p — одно из них и пусть $n=5+7+p$. Так как $n=5(6k+7)$ и $n-2=$ $=3(10k+21)$, то число n удовлетворяет заданным условиям.

8. Существует бесконечно много простых чисел вида $30k+29$. Пусть p — одно из них и пусть $n=5+31+p$. Так как $n=5(6k+13)$ и $n-2=3(10k+21)$, то число n удовлетворяет заданным условиям.

Теорема доказана. Ср.: W. Sierpiński. Glasnik Mat.-Fiz. i Astr. сер. II, т. 16. Zagreb, 1961, стр. 87—88.

137. Предположим, что существует многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами, такой, что $f(1)=2$, $f(2)=3$ и $f(3)=5$. Тогда $g(x)=f(x)-2$ есть многочлен с целыми коэффициентами, такой, что $g(1)=0$ и, значит, $g(x)=(x-1)h(x)$, где $h(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами.

Так как $f(3)=5$, то $g(3)=f(3)-2=3$ и, следовательно, $2h(3)=3$. Но последнее невозможно, так как $h(3)$ есть целое число.

Пусть теперь m — данное натуральное число >1. Тогда

$$g_k(x)=\frac{(x-1)(x-2)\dots(x-m)}{x-k},$$

где $k=1, 2, \dots, m$, есть многочлен степени $m-1$ с целыми коэффициентами. Очевидно, $g_k(x)=0$ для каждого натурального числа $x\leqslant m$, отличного от k, а $g_k(k)$ — целое число $\neq 0$. Пусть $f_k(x)=\frac{g_k(x)}{g_k(k)}$; $f_k(x)$ — многочлен степени $m-1$ с рациональными коэффициентами, причем $f_k(x)=0$ для каждого натурального числа $x\leqslant m$, отличного от k, и $f_k(k)=1$.

Пусть теперь

$$f(x)=p_1f_1(x)+p_2f_2(x)+\dots+p_mf_m(x).$$

Здесь, очевидно, $f(x)$ — многочлен с рациональными коэффициентами, причем $f(k)=p_k$ для $k=1, 2, \dots, m$.

138*. Доказательство Я. Бровкина. Пусть n — данное натуральное число. Определим натуральные числа t_k для натуральных $k\leqslant n$ посредством индукции следующим образом.

Пусть $t_0=1$; предположим, что при данном натуральном $k\leqslant n$ мы уже определили натуральное число t_{k-1}. На основании теоремы Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии существует натуральное число t_k, такое, что число

$$q_k=(k-1)!(n-k)!t_k+1$$

является простым и, в случае $k>1$, оно больше числа

$$(k-2)!(n-k+1)!t_{k-1}+1.$$

Итак, числа $q_1, q_2, \dots, q_n$ простые, причем $q_1<q_2<\dots<q_n$.

Пусть $f(x)=1+\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}\frac{(x-1)(x-2)\dots(x-n)}{x-j}t_j;$

$f(x)$ есть многочлен степени $\leqslant n-1$ с целыми коэффициентами и, как легко проверить,

$$f(k)=1+(k-1)!\,(n-k)!\,t_k=q_k.$$

139. Таков, например, многочлен

$$f(x)=[(x-p_1)(x-p_2)\ \ldots\ (x-p_m)+1]x,$$

где p_k — k-е по порядку простое число.

Здесь $f(p_k)=p_k$ для $k=1,\ 2,\ \ldots\ ,\ m$.

140. Если бы свободный член многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами был равен 0, то мы имели бы $f(0)=0$ и сравнение $f(x)\equiv 0 \pmod p$ было бы разрешимо для каждого модуля p. Итак, предположим, что свободный член a_0 многочлена $f(x)$ не является нулем. Так как $f(a_0x)=a_0f_1(x)$, где $f_1(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, свободный член которого есть единица, то достаточно доказать нашу теорему только для таких многочленов.

Пусть n — произвольное заданное натуральное число. Очевидно, $n!\,|\,f_1(n!)-1$, так что $f_1(n!)=n!k+1$, где k — целое число. Как известно, абсолютная величина многочлена $f_1(x)$ (степень которого >0) возрастает неограниченно вместе с x. Поэтому при достаточно большом n $|f_1(n!)|=|n!k+1|>1$ и число $n!k+1$ имеет простой делитель p. Так как $p\,|\,n!\cdot k+1$, то $p>n$, а так как $p\,|\,f_1(n!)$, то сравнение $f_1(x)\equiv 0 \pmod p$ разрешимо для простого модуля $p>n$. Но n — произвольное натуральное число; следовательно, сравнение $f_1(x)\equiv 0 \pmod p$, а значит, также и сравнение $f(x)\equiv 0 \pmod p$ разрешимо для бесконечного числа простых чисел p.

141. Условие не является необходимым, так как число $2^3+1=3^2$ составное, а число $2^{2^3}+1=257$ простое. Условие не является достаточным, так как число $2^8+1=257$ простое, а число $2^{2^8}+1$ составное (как доказали в 1909 г. Морхед и Вестерн). Другой пример: число $2^{16}+1$ простое, а число $2^{2^{16}}+1$ составное (как доказал Селфридж в 1953 г.).

V. Диофантовы уравнения [9]

142. Из тождества

$$3(55a+84b)^2-7(36a+55b)^2=3a^2-7b^2$$

следует, что если натуральные числа $x=a$ и $y=b$ удовлетворяют уравнению $3x^2-7y^2+1=0$, то этому уравнению удовлетворяют и бóльшие натуральные числа: $x=55a+84b$ и $y=36a+55b$, а так как ему удовлетворяют числа $x=3$, $y=2$, то оно, очевидно, имеет бесконечно много решений в натуральных числах x, y.

143. Так как $x(2x^2+y)=7$, то число x должно быть целым делителем числа 7, т. е. одним из чисел 1, 7, —1, —7. Подставляя эти значения в наше уравнение, получим для y соответствующие значения: 5, —97, —9, —99. Таким образом, наше уравнение имеет четыре решения в целых числах: (1, 5), (7, —97), (—1, —9) и (—7, —99).

Пусть теперь n означает произвольное натуральное число >5 и пусть $x=\frac{7}{n}$, $y=n-\frac{98}{n^2}$. Так как $n>5$ и, значит, $n\geqslant 6$, то эти числа рациональные положительные и, как легко проверить, они дают решение уравнения $2x^3+xy-7=0$.

144. Пусть m и n — данные натуральные числа и пусть a и b — два различных простых числа $>m+n$. Пусть $c=am+bn$. Система $x=m$, $y=n$, очевидно, удовлетворяет уравнению $ax+by=c$.

Предположим, что существует другая система натуральных чисел x, y, удовлетворяющая этому уравнению. Здесь, очевидно, не может быть одновременно $x\geqslant m$ и $y>n$ или $x>m$, $y\geqslant n$, так как тогда было бы $ax+by>am+bn=c$. Следовательно, должно быть либо $x<m$, либо $y<n$. Если $x<m$, то $m-x$ есть натуральное число, меньшее m, и так как $ax+by=am+bn$, то $by=a(m-x)+bn$, откуда следует что $b|a(m-x)$. Но a и b — различные простые числа и поэтому $b|m-x$. Последнее же невозможно, так как по определению числа b имеем $b>m$.

Аналогичным образом доказываем, что и предположение $y<n$ нужно отбросить.

Примечание. Как легко заметить, не для каждых двух систем натуральных чисел существует линейное уравнение $ax+by=c$, где a, b и c — целые числа, для которого только эти две системы служат решениями в натуральных числах. Но, как легко можно доказать, всегда существует такое уравнение второй степени с целыми коэффициентами.

145. Таковым является, например, уравнение $x+y=m+1$, которое, как легко заметить, имеет в натуральных числах x, y точно m решений.

$$x=k,\ y=m-k+1,\ \text{где } k=1, 2, \ldots, m.$$

Примечание. Как известно, не существует линейного уравнения $ax+by=c$, которое имело бы конечное >0 число решений в целых числах x, y.

146. Для $f(x, y)=x^2+y^2+2xy-mx-my-m-1$ выполняется тождество

$$f(x, y)=(x+y-m-1)(x+y+1).$$

Так как для натуральных x и y $x+y+1>0$, то $f(x, y)=0$ тогда и только тогда, когда $x+y-m-1=0$. Поэтому, как это следует из решения задачи 145, уравнение $f(x, y)=0$ имеет точно m решений в натуральных числах x, y.

Примечание. Многочлен от двух переменных $f(x, y)$ является приводимым. Напрашивается вопрос, для каждого ли натурального числа m существует неприводимый многочлен второй степени $F(x, y)$, такой, что уравнение $F(x, y)=0$ имеет точно m решений в натуральных числах x, y. Так вот, можно доказать, что для каждого натурального числа m существует натуральное число a_m, такое, что уравнение $x^2+y^2=a_m$ имеет точно m решений в натуральных числах x, y. Именно можно доказать, что это так для $a_{2k-1}=2\cdot 5^{2k-2}$ и $a_{2k}=5^{2k-1}$, где $k=1, 2, 3$, но доказательство нелегкое.

Заметим здесь еще, что, как доказал А. Шинцель, для каждого натурального числа m существует многочлен второй степени $f(x, y)$, от переменных x и y, такой, что уравнение $f(x, y)=0$ имеет точно m решений в целых числах. См.: A. Schinzel. Sur l'existence d'un cercle passant par un nombre donné de points aux Coordonnées entiéres. L'Enseignement Mathématique, IV, 1958, стр. 71—72.

147. Как легко проверить, если числа x и y удовлетворяют уравнению

$$(x-1)^2+(x+1)^2=y^2+1, \tag{1}$$

то

$$(2y+3x-1)^2+(2y+3x+1)^2=(3y+4x)^2+1.$$

Таким образом, из каждого решения уравнения (1) в натуральных числах x и y мы получаем решение того же уравнения в бóльших натуральных числах: $2y+3x$ и $3y+4x$, а так как оно имеет решение в натуральных числах $x=2$, $y=3$, то оно имеет, следовательно, бесконечное число таких решений.

148. Положим, $x=t+3$. Тогда наше уравнение примет вид

$$2t(t^2+3t+21)=0,$$

которое имеет только одно решение в вещественных числах, именно $t=0$. Отсюда следует, что наше уравнение имеет в вещественных числах x только одно решение: $x=3$.

Примечание. Можно доказать, что всеми решениями уравнения

$$x^3+(x+r)^3+(x+2r)^3+\ \ldots\ +[x+(n-1)r]^3=(x+nr)^3$$

в натуральных числах x, r, n являются только $n=3$, $x=3r$, где r — любое натуральное число.

149. Если $n=2k-1$, где k — натуральное число, то, как легко проверить, $x=-k$, $y=0$ является решением нашего уравнения; если же $n=2k$, где k — натуральное число, то $x=-k$, $y=k$ является решением нашего уравнения.

Примечание. Имеются и другие решения, например для $n=8$: $x=-3$, $y=6$; для $n=25$: $x=-11$, $y=20$; для $n=1000$: $x=1333$, $y=16\,830$.

150. В заданном уравнении коэффициенты при x^3, x^2 и x делятся на 3, а свободный член есть —25, т. е. число, не делящееся на 3. Отсюда следует, что наше уравнение не имеет решений в целых числах x.

151. Посредством замены $x=t+10$ наше уравнение переходит в уравнение

$$3t(t^2+40t+230)=0.$$

Так как уравнение $t^2+40t+230=0$ не имеет решений в рациональных числах, то должно быть $t=0$ и, таким образом, наше уравнение имеет только одно решение в рациональных числах: $x=10$.

152. Если бы при натуральных x и y было $x(x+1)=4y(y+1)$, то мы имели бы:

$$3=[2(2y+1)]^2-(2x+1)^2=(4y-2x+1)(4y+2x+3)$$

и, таким образом, число 3 было бы кратным натуральному числу $4y+$ $+2x+3$, т. е. числу, бо́льшему, чем оно само, что невозможно.

Зато, как легко проверить, при натуральном $n>1$ для

$$x=\frac{3^n-3^{1-n}-2}{4},\ y=\frac{3^n+3^{1-n}-4}{8} \quad \text{имеем } x(x+1)=4y(y+1).$$

Например, для $n=2$ имеем $x=\frac{5}{3}$, $y=\frac{2}{3}$. Таким образом, наше уравнение имеет бесконечно много решений в рациональных положительных числах x, y.

153. Доказательство непосредственно вытекает из следующих двух тождеств:

$$2k-1=(2l^2-k)^2+(2l)^2-(2l^2-k+1)^2,$$
$$2k=(2l^2+2l-k)^2+(2l+1)^2-(2l^2+2l-k+1)^2$$

для всех целых k и для натуральных $l>k$.

154. Это уравнение имеет только одно решение в натуральных числах: $m=2$, $n=1$. Действительно, так как $3^2\equiv1 \pmod 8$, то для натуральных k имеем $3^{2k}+1\equiv2 \pmod 8$ и $3^{2k-1}+1\equiv4 \pmod 8$, откуда следует, что при натуральном n число 3^n+1 не делится на 8 и, значит, не делится на 2^m для натурального $m\geqslant3$. Таким образом, если при натуральных m и n имеем $2^m-3^n=1$, то должно быть $m\leqslant2$, так что либо $2-3^n=1$, что невозможно, либо $2^2-3^n=1$, что дает $n=1$.

155. Это уравнение имеет только два решения в натуральных числах: $n=m=1$ и $n=2$, $m=3$. Действительно, если n — нечетное число >1, т. е. $n=2k+1$, где k — натуральное число, то, так как $3^2\equiv1 \pmod 4$, имеем $3^{2k+1}\equiv3 \pmod 4$, откуда $2^m=3^n-1=3^{2k+1}-1\equiv2 \pmod 4$; следовательно, $m\leqslant1$, т. е. $m=1$, а так как $3^n-2^m=1$, то и $n=1$. Если же n — четное число, $n=2k$, то имеем $2^m=3^{2k}-1=(3^k-1)(3^k+1)$. Таким образом, два последовательных четных числа 3^k-1 и 3^k+1 являются степенями числа 2 и поэтому это числа 2 и 4, так что $k=1$, $n=2$ и, наконец, $m=3$.

156. Предположим, что наша система имеет решение в натуральных числах x, y, z, t. Мы можем здесь предположить, что $(x, y)=1$ так, как в случае $(x, y)=d>1$ мы разделили бы обе части наших уравнений на d^2. Итак, по крайней мере одно из чисел x и y является нечетным. Но нечетными не могут быть оба числа, так как тогда левые части наших уравнений при делении на 4 давали бы в остатке 3, что несовместимо с тем, что они являются квадратами. Однако если, например, x — четное число, то y не может быть нечетным, так как тогда левая часть первого уравнения при делении на 4 давала бы в остатке 2, что несовместимо с тем, что она является квадратом. Таким образом, в любом случае мы приходим к противоречию.

157. Наше уравнение, как легко проверить, равносильно уравнению $(2x+1)^2-2y^2=-1$, которое имеет в натуральных числах решение $x=3$, $y=5$. Поэтому из тождества следует, что если натуральные числа x и y удовлетворяют нашему уравнению, то ему удовлетворяют и бóльшие числа: $x_1=3x+2y+1$ и $y_1=4x+3y+2$. Следовательно, рассматриваемое уравнение имеет бесконечно много решений в натуральных числах x и y. Так, например, для $x=3$, $y=5$ мы получим решение: $x_1=20$, $y_1=29$.

158. Наше уравнение, как легко проверить, равносильно уравнению $(2y)^2-3(2x+1)^2=1$ и одно из его решений есть $x=7$, $y=13$. Поэтому из тождества следует, что если натуральные числа x и y удовлетворяют нашему уравнению, то ему удовлетворяют и бóльшие числа: $x_1=4y+7x+3$ и $y_1=7y+12x+6$. Следовательно, уравнение $(x+1)^3-x^3=y^2$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах x и y. Так, например, для $x=7$, $y=13$ мы получим решение: $x_1=104$, $y_1=181$.

159. Проведем доказательство, следуя идее Я. Бровкина. Если бы система наших уравнений имела решение в натуральных числах x, y, z, t, то она имела бы и такое решение, в котором $(x, y)=1$. Складывая почленно наши уравнения, получим $6(x^2+y^2)=z^2+t^2$, откуда следует, что $3|z^2+t^2$. Так как квадрат целого числа, не делящегося на 3, дает при делении на 3 в остатке 1, то числа z и t не могут быть оба не делящимися на 3. Но так как $3|z^2+t^2$, то если одно из чисел z, t делится на 3, то и другое делится на 3. Итак, оба числа z и t делятся на 3 и, следовательно, правая часть равенства $6(x^2+y^2)=z^2+t^2$ делится на 9. Но тогда $3|x^2+y^2$ и, значит, оба числа x и y делятся на 3 вопреки предположению, что $(x, y)=1$.

160. Из наших уравнений следует, что $7|z^2+t^2$, откуда (см. задачу 3) $7|z$ и $7|t$; следовательно, $49|7(x^2+y^2)$, откуда $7|x$ и $7|y$. Итак, система наших уравнений не может иметь решений, в которых $(x, y)=1$. Но в таком случае она не может иметь решений в натуральных числах x, y, z, t, так как если $(x, y)=d>1$, то $d|z$ и $d|t$, так что, разделив числа x, y, z и t на d, мы получим решение x_1, y_1, z_1, t_1, для которого $(x_1, y_1)=1$, что невозможно.

161. Решением наших уравнений в натуральных числах является, например, система чисел: $x=3$, $y=1$, $z=4$, $t=8$.

162. Если бы y было четным числом, то x^2 было бы числом вида $8k+7$, что невозможно. Если же y было бы нечетным числом, $y=2k+1$, то мы имели бы $x^2+1=y^3+2^3=(y+2)[(y-1)^2+3]$, откуда $(2k)^2+3|x^2+1$; но число $(2k)^2+3$ имеет простой делитель вида $4t+3$, следовательно, такой делитель должно иметь и число x^2+1, что невозможно, так как $(x, 1)=1$.

163. Имеем $x^2+1=(2c)^3+y^3=(y+2c)(y^2-2cy+4c^2)=(y+2c)[(y-c)^2+3c^2]$. Так как $c^2\equiv 1 \pmod 8$, то $3c^2\equiv 3 \pmod 8$ и если y нечетное, то $y-c$ четное и $(y-c)^2+3c^2$ есть число вида $4k+3$ и, следовательно, имеет простой делитель того же вида, который является делителем числа x^2+1, что невозможно. Если же y четное, то было бы $x^2=(2c)^3+y^3-1\equiv -1 \pmod 8$, что невозможно. Отсюда следует, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде x^2-y^3, где x и y — целые числа.

164. Предположим вначале, что $x=1$. Тогда имеем уравнение $1+y=zt$, $z+t=y$, откуда $zt=z+t+1$. Отсюда следует, что $z\neq 1$ (так как $z=1$ дало бы $t=t+2$, что невозможно). Если $z=2$, то $t=3$, откуда в силу $y=z+t$ $y=5$, что дает решение нашей системы уравнений: $x=1$, $y=5$, $z=2$, $t=3$. Если $z\geqslant 3$, то $t\geqslant z\geqslant 3$ и имеем $z=z_1+2$, $t=t_1+2$, где $z_1\geqslant 1$ и $t_1\geqslant 1$, откуда $zt=(z_1+2)(t_1+2)=z_1t_1+2z_1+2t_1+4\geqslant z_1+t_1+7=z+t+3$ вопреки тому, что $zt=z+t+1$.

Предположим теперь, что $x=2$. Тогда $z\geqslant x=2$. Если $z=2$, то $2+y=2t$, $2+t=2y$, откуда $y=t=2$. Таким образом, в этом случае было бы $x=y=z=t$, что дает решение нашей системы уравнений. Если $z>2$, то, так как $t\geqslant z$, будет и $t>2$ и можно положить $z=z_1+2$, $t=t_1+2$, где $z_1\geqslant 1$ и $t_1\geqslant 1$, откуда $zt=(z_1+2)(t_1+2)=z_1t_1+2z_1+2t_1+4\geqslant z_1+t_1+7=z+t+3$. Но, так как $x=2$, имеем $2+y=zt$, $z+t=2y$, откуда $zt=2+\frac{z+t}{2}$. Таким образом, было бы $\frac{z+t}{2}+2=zt\geqslant z+t+3$, откуда $z+t+2\leqslant 0$, что невозможно.

Предположим теперь, что $x>2$, т. е. что $x\geqslant 3$. Тогда $z\geqslant x\geqslant 3$ и $t\geqslant z\geqslant 3$. Следовательно, можно положить $z=z_1+2$, $t=t_1+2$, где $z_1\geqslant 1$ и $t_1\geqslant 1$. Отсюда $zt=(z_1+2)(t_1+2)=z_1t_1+2z_1+2t_1+4\geqslant z_1+t_1+7=z+t+3$. Подобным же образом из $x\geqslant 3$ и $y\geqslant x\geqslant 3$ получим $xy\geqslant x+y+3$. Но $z+t=xy$. Следовательно, $zt\geqslant z+t+3=xy+3\geqslant x+y+6=zt+6$, что невозможно. Таким образом, система наших двух уравнений имеет в натуральных числах x, y, z, t, где $x\leqslant z\leqslant t$, только два решения: $x=1$, $y=5$, $z=2$, $t=3$ и $x=y=z=t=2$.

Примечание. Система наших уравнений имеет бесконечно много решений в целых числах x, y, z и t. Я. Бровкин заметил, что такие решения дают числа $x=z=0$, $t=y$, y — любое. Монковский же заметил следующие решения нашей системы уравнений: $x=t=-1$, y — любое, $z=1-y$.

165. Для $n=1$ число x_1 может быть произвольным. Для $n=2$ $x_1=x_2=2$. Для $n>2$ решением будет $x_1=x_2=\ldots=x_{n-2}=1$, $x_{n-1}=2$ $x_n=n$. Существуют, однако, и другие решения, например для $n=5$ $x_1=x_2=x_3=1$, $x_4=x_5=3$. Таким образом, мы можем сказать, что для каждого натурального числа n существует n натуральных чисел, сумма которых равна их произведению.

166. Если $n=1$, то всеми решениями уравнения $x-y=a$ в натуральных числах являются y — любое натуральное, $x=a+y$. Если n есть нечетное число >1, то

$$a=x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\ldots+y^{n-1})$$

и, так как $a>0$, $x-y\geqslant 1$, то $x^{n-1}+y^{n-1}<a$; следовательно, $x<\sqrt[n-1]{a}$ и $y<\sqrt[n-1]{a}$, и, значит, достаточно провести конечное число проб.

Если $n=2k$, где k — натуральное число, то $a=x^n-y^n=x^{2k}-y^{2k}=(x^k-y^k)(x^k+y^k)$, откуда, ввиду $a>0$, $x^k-y^k\geqslant 1$; следовательно, $x^k+y^k\leqslant a$, и, значит, $x<\sqrt[k]{a}$ и $y<\sqrt[k]{a}$, так что и в этом случае достаточно провести конечное число проб.

167 *. Доказательство А. Шинцеля. Пусть p — простое число, n — натуральное число; предположим, что натуральные числа x и y удовлетворяют уравнению $x(x+1)=p^{2n}\cdot y(y+1)$. Так как числа x и $x+1$ взаимно простые, то имеем либо $p^{2n}|x$, либо $p^{2n}|x+1$, так что в любом случае $x+1\geqslant p^{2n}$. Но наше уравнение равносильно уравнению

$$p^{2n}-1=[p^n(2y+1)+(2x+1)]\,[p^n(2y+1)-(2x+1)].$$

Так как левая часть этого равенства и первый сомножитель правой части являются натуральными числами, то и второй сомножитель правой части должен быть натуральным числом. Отсюда следует, что $p^{2n}-1>2x+1$ и, значит, $p^{2n}>2(x+1)$. Учитывая теперь найденное выше неравенство $x+1\geqslant p^{2n}$, получим $p^{2n}>2p^{2n}$, что невозможно.

168. $x=1$, $y=2$ (так как $2\cdot 3=1\cdot 2\cdot 3$) и $x=5$, $y=14$ (так как $14\cdot 15=5\cdot 6\cdot 7$).

Примечание. Л. Морделл доказал, что других решений в натуральных числах наше уравнение не имеет [10].

169. Имея в виду тождество $(x-2y)^2-2(x-y)^2=-(x^2-2y^2)$, можно положить $t=x-2y$, $u=x-y$.

170. а) Доказательство вытекает непосредственно из тождества

$$(m^2+Dn^2)^2-D(2mn)^2=(m^2-Dn^2)^2.$$

Достаточно для произвольного натурального числа n выбрать натуральное число m так, чтобы выполнялось неравенство $m^2>Dn^2$, и принять

$$x=m^2+Dn^2,\ y=2mn,\ z=m^2-Dn^2.$$

б) Это следует непосредственно из тождества

$$1+(2n)^2+(2n^2)^2=(2n^2+1)^2 \text{ для } n=2, 3, \ldots .$$

Так, например, $1+4^2+8^2=9^2$, $1+6^2+18^2=19^2$.

Примечание. Легко также доказать, что для любого целого числа k уравнение $k+x^2+y^2=z^2$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах x, y, z.

Достаточно за x принять любое число $>|k|+1$, четное, если k — нечетное, и нечетное, если k — четное, и принять:

$$y=\frac{k+x^2-1}{2}, \quad z=\frac{k+x^2+1}{2}.$$

Ср.: W. Sierpiński. Teoria liczb, wyd. 3. Warszawa — Wrocław, 1950, стр. 92 (упражнение).

171. Наше уравнение равносильно уравнению $2^{2^5}+1=(x+1)(y+1)$. Так как число Ферма $F_5=2^{2^5}+1$ является, как известно, произведением двух простых чисел, меньшее из которых есть 641, то уравнение наше имеет только одно решение в натуральных числах x и $y \geqslant x$, именно получаемом при $x=640$.

Примечание. Интересно заметить, что о некоторых уравнениях второй степени с двумя неизвестными мы знаем, что они имеют только одно решение в натуральных числах x и $y \geqslant x$, однако (только из-за технических трудностей) мы не в состоянии его найти. Так обстоит дело, например, с уравнением $xy+x+y+2=2^{101}$.

Мы не знаем, имеет ли уравнение $xy+x+y=2^{2^{17}}$ решение в натуральных числах.

172. Если y — четное число, то $x^2=3-8z+2y^2$ при делении на 8 дает в остатке 3, что невозможно. Если же y есть нечетное число, $y=2k+1$, где k — целое число, то $x^2=3-8z+8k^2+8k+2$ при делении на 8 дает в остатке 5, что также невозможно, так как квадрат нечетного числа при делении на 8 дает в остатке 1.

173. Пусть x — произвольное натуральное число. Как легко проверить, имеет место тождество $x(x+1)(x+2)(x+3)+1=(x^2+3x+1)^2$, так что согласно нашему уравнению $y=x^2+3x+1$. Итак, все решения нашего уравнения в натуральных числах x и y получаются следующим образом: x — произвольное натуральное число, $y=x^2+3x+1$.

174. Уравнение $x^2+y^2+z^2+x+y+z=1$ не имеет решений в рациональных числах, так как оно, как легко проверить, равносильно уравнению

$$(2x+1)^2+(2y+1)^2+(2z+1)^2=7$$

и, значит, число 7 было бы суммой квадратов трех рациональных чисел.

Докажем, что последнее невозможно. Действительно, если бы число 7 было бы суммой трех квадратов рациональных чисел, то после приведения наших чисел к общему знаменателю мы получили бы уравнение

$$a^2+b^2+c^2=7m^2, \qquad (1)$$

где a, b и c являются целыми числами, m же число натуральное. Таким образом, существовало бы наименьшее натуральное число m, для которого уравнение (1) имеет решение в целых числах a, b, c.

Если бы m было четным числом, $m=2n$, где n — натуральное число, то правая часть уравнения (1) делилась бы на 4, откуда мы легко заключили бы, что все три числа a, b и c должны быть четными, т. е. $a=2a_1$, $b=2b_1$, $c=2c_1$, где a_1, b_1 и c_1 — целые числа. Так как $m^2=4n^2$, то, сделав все замены в уравнении (1), мы получили бы:

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2=7n^2,$$

где n — натуральное число $<m$, вопреки тому, что m — наименьшее натуральное число, для которого $7m^2$ есть сумма трех квадратов целых чисел.

Итак, m есть нечетное число и поэтому число m^2 при делении на 8 дает в остатке 1, и, следовательно, правая часть уравнения (1) при делении на (8) дает в остатке 7. Но, как известно, ни одно такое число не представимо суммой трех квадратов целых чисел.

Ср.: Matematyka, 1952, № 2 (19), стр. 58—59, задача 192.

175. Если бы натуральные числа x, y, z удовлетворяли уравнению $4xy-x-y=z^2$, мы имели бы $(4x-1)(4y-1)=(2z)^2+1$ и натуральное число $4x-1\geqslant 3$ имело бы простой делитель p вида $4k+3$. Таким образом, выполнялось бы сравнение $(2z)^2\equiv -1 \pmod p$, откуда, так как $p=4k+3$, мы имели бы $(2z)^{p-1}=(2z)^{2(2k+1)}\equiv -1 \pmod p$, что противоречит малой теореме Ферма.

Но если n означает произвольное натуральное число и $x=-1$, $y=-5n^2-2n$, $z=-5n-1$, то, как легко проверить, числа x, y и z удовлетворяют уравнению $4xy-x-y=z^2$.

176. Легко проверить, что для натуральных m и для $D=m^2+1$ имеем $(2m^2+1)^2-D(2m)^2=1$. Если же при натуральных x и y имеем $x^2-Dy^2=1$, то согласно тождеству

$$(x^2+Dy^2)^2-D(2xy)^2=(x^2-Dy^2)^2$$

также имеем $x_1^2-Dy_1^2=1$, где $x_1=x^2+Dy^2$ и $y_1=2xy$ — натуральные числа, бóльшие, чем x и y.

Отсюда вытекает, например, что уравнение $x^2-Dy^2=1$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах x и y для $D=2$, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65, 82.

177*. Уравнение $y^2=x^3+(x+4)^2$ имеет два очевидных решения: $x=0$, $y=4$ и $x=0$, $y=-4$. Приведем теперь доказательство (принадлежащее А. Шинцелю) того, что это уравнение не имеет решений в целых числах x, y, где $x\neq 0$ (ср.: Acta Arithmetica, VI, 1961, стр. 470—471).

Предположим, что целые числа $x\neq 0$ и y удовлетворяют нашему уравнению. Тогда имеем:

$$x^3=(y-x-4)(y+x+4). \qquad (1)$$

Отсюда, так как $x \neq 0$, целые числа $y-x-4$ и $y+x+4$ должны быть отличны от нуля. Пусть

$$d=(y-x-4, y+x+4). \qquad (2)$$

Если бы число d имело нечетный простой делитель p, то на основании (1) мы заключили бы, что $p|x$, а так как $p|d$, то ввиду (2) — что $p|y-x-4$ и $p|y+x+4$, следовательно, $p|2y$, откуда ввиду нечетности p $p|y$ и $p|4$, что невозможно. Следовательно, d не имеет нечетного простого делителя и поэтому d является степенью двойки с целым показателем $\geqslant 0$.

Предположим, что $16|d$, тогда, на основании (1) и (2) имеем: $2^8|x^3$, откуда $2^3|x$ и, так как $d|(y+x+4)-(y-x-4)=2x+8$, то $16|8$, что невозможно. Таким образом, $16 \nmid d$.

Предположим, что $d=2$. Тогда $y-x-4=2m$, $y+x+4=2n$, где $(m, n)=1$. На основании (1) и (2) найдем, что $2|x$, а следовательно, также $2|y$. Но $2y=2(m+n)$, откуда $y=m+n$, значит, $2|m+n$, что ввиду $(m, n)=1$ доказывает, что числа m и n оба нечетные. Таким образом, так как $x^3=4mn$, то $8 \nmid x^3$, что невозможно (выше было доказано, что $2|x$ и поэтому $8|x^3$). Итак, $d \neq 2$.

Предположим, что $d=4$. Тогда $y-x-4=4m$, $y+x+4=4n$, где $(m, n)=1$. Таким образом, ввиду (1) $x^3=16mn$, откуда вытекает, что $4|x$ и, значит, $4|mn$, и, так как $(m, n)=1$, одно из чисел m и n делится на 4, а другое нечетное.

Но, так как $4|x$ и $4=d|x-y-4$, то $4|y=2(m+n)$, что невозможно. Итак, $d \neq 4$.

Так как $16 \nmid d$, $d \neq 2$ и $d \neq 4$ и так как d есть степень двойки, то остаются еще только два случая: $d=1$ и $d=8$.

Если $d=1$, то из (1) и (2) следует, что числа $y-x-4$ и $y+x+4$ являются кубами целых чисел, $y-x-4=a^3$, $y+x+4=b^3$, откуда ввиду (1) $x=ab$ и $2x+8=b^3-a^3$. Здесь не может быть $a=b$, так как тогда было бы $x=-4$ и из уравнения $y^2=x^3+(x+4)^2$ вытекало бы $y^2=-4^3$, что невозможно. Так как $x=ab$, то имеем $2ab+8=b^3-a^3=(b-a)[(b-a)^2+ +3ab]$, откуда следует, что если $b-a=1$, то $2ab+8=1+3ab$, так что $ab=7$; следовательно, $x=7$ и $y^2=7^3+11^2=464$, что невозможно, так как число 464 не является квадратом. Следовательно, если $ab>0$, то $b-a>0$, откуда ввиду $b-a \neq 1$ следует, что $b-a \geqslant 2$ и $2ab+8>6ab$, так что $ab<2$ и, значит $ab=1$, откуда $a=b$, что, как известно, невозможно. Если же $ab<0$, то либо $a>0$, $b<0$, откуда $a^3-b^3=a^3+(-b)^3 \geqslant a^2+ +(-b)^2 \geqslant -2ab$ вопреки тому, что $a^3-b^3=-2ab-8<-2ab$, либо же $a<0$, $b>0$, откуда, так как $b^3=a^3+2ab+8$, найдем $b^3<8$, значит, $b=1$ и $a^3+2a+7=0$. Последнее же невозможно, так как уравнение $t^3+2t+ +7=0$ не имеет решений в целых числах. Итак, должно быть $ab=0$ и, значит, $x=0$, вопреки предположению, что $x \neq 0$. Таким образом, невоз-

можен и случай $d=1$. Остается рассмотреть последнее предположение: $d=8$.

Итак, на основании (2) имеем $y-x-4=8m$, $y+x+4=8n$, где $(m, n)=1$, и, значит, согласно (1) $x^3=64mn$, т. е. $(\frac{x}{4})^3=mn$, откуда, так как $(m, n)=1$, следует, что числа m и n являются кубами целых чисел, например $m=a^3$, $n=b^3$, откуда $\frac{x}{4}=ab$ и $2x+8=8(n-m)=8(b^3-a^3)$, так что $ab+1=b^3-a^3$. Ясно, что здесь не может быть $a=b$. Таким образом, $|b-a|\geqslant 1$.

Если $ab>0$, то $b>a$ и $b-a\geqslant 1$, а так как $ab+1=b^3-a^3=(b-a)\times\times[(b-a)^2+3ab]>3ab$, то найдем, что $2ab<1$ вопреки тому, что $ab>0$. Далее, так как $4ab=x\neq 0$, то остается рассмотреть предположение $ab<0$. Итак, с одной стороны, $|b-a|\geqslant 1$ и $|b^3-a^3|=|b-a|\cdot|(b+a)^2-ab|\geqslant -ab$; с другой же стороны, так как $ab<0$, имеем $|ab+1|<|ab|=-ab$. Таким образом, равенство $ab+1=b^3-a^3$ невозможно.

Итак, доказано, что уравнение $y^2=x^3+(x+4)^2$ не имеет решений в целых числах $x\neq 0$ и y.

178. Наше уравнение равносильно уравнению $x^2z+y^2x+z^2y=mxyz$ в целых числах x, y, z, отличных от нуля и попарно взаимно простых. Из этого уравнения вытекает, что $y|x^2z$, $z|y^2x$, $x|z^2y$, а так как $(x, y)=1$ и $(z, y)=1$, то $(x^2z, y)=1$ и поэтому из того, что $y|x^2z$, следует $y=\pm 1$. Подобным образом найдем $z=\pm 1$, $x=\pm 1$.

Если числа x, y и z имеют одинаковые знаки, то из нашего уравнения получим $1+1+1=m$ и, значит, $m=3$. Если бы из чисел x, y, z два было положительных и одно отрицательное или два отрицательных и одно положительное, то из нашего уравнения вытекало бы (так как $x=\pm 1$, $y=\pm 1$, $z=\pm 1$), что m, вопреки предположению, есть число отрицательное.

Итак, для натуральных m уравнение

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=m$$

имеет решение в целых числах x, y, z, отличных от нуля и попарно взаимно простых, только для $m=3$ и имеет тогда только такие два решения: $x=y=z=1$ и $x=y=z=-1$. Для натуральных же $m\neq 3$ наше уравнение не имеет решений в целых числах x, y, z, отличных от нуля и попарно взаимно простых.

179. Так как $\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{x}=1$, то рациональные положительные числа $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$ и $\frac{z}{x}$ не могут быть все <1; если же хотя бы одно из них $\geqslant 1$, то

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}>1,$$

т. е. левая часть этого неравенства не может быть равна 1 ни для каких натуральных чисел x, y, z.

Примечание. Значительно труднее было бы доказать, что наше уравнение не имеет решений в целых числах $\neq 0$ [см.: Acta Arithmetica, VI, 1961, стр. 47—52, стр. 469, и там же, VII, 1961/62, стр. 187—190].

180*. Лемма. Если a, b и c — вещественные положительные числа, не все равные между собой, то

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 > abc. \qquad (1)$$

Доказательство. Пусть a, b, c — не все равные между собой положительные числа. Тогда существуют положительные числа u, v и w, не все равные между собой, такие, что $a=u^3$, $b=v^3$, $c=w^3$.

Имеем тождество

$$u^3+v^3+w^3-3uvw=\frac{1}{2}\,(u+v+w)\cdot[(u-v)^2+(v-w)^2+(w-u)^2].$$

Так как не все числа u, v и w между собой равны, то последний сомножитель правой части тождества есть число положительное и, следовательно,

$$u^3+v^3+w^3>3uvw,$$

откуда

$$\left(\frac{u^3+v^3+w^3}{3}\right)^3>u^3v^3w^3. \qquad (2)$$

Так как $u^3=a$, $v^3=b$, $w^3=c$, то неравенство (2) дает неравенство (1) и, таким образом, устанавливает справедливость леммы.

Пусть теперь x, y и z — натуральные числа. Если бы числа $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}$ были все равны между собой, то, так как они положительны и произведение их равно 1, все они должны были бы быть равны 1 и мы имели бы:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=3>2.$$

Итак, не все три числа $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}$ между собой равны; поэтому в силу леммы

$$\left[\frac{1}{3}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)\right]^3>\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{x}=1,$$

откуда

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}>3.$$

Таким образом, уравнение

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=2$$

не имеет решений в натуральных числах x, y, z.

181. Предположим, что натуральные числа x, y, z удовлетворяют нашему уравнению. Если не все три числа $\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}$ между собой равны, то, как мы знаем из решения задачи 180, будет:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}>3.$$

Таким образом, должно быть $\frac{x}{y}=\frac{y}{z}=\frac{z}{x}$, и из нашего уравнения следует. что каждое из этих чисел равно 1, так что $x=y=z$. В этом случае

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=1+1+1=3.$$

Итак, наше уравнение имеет бесконечно много решений в натуральных числах x, y, z. Все решения этого уравнения в натуральных числах мы получим, положив $y=z=x$, где x — произвольное натуральное число.

Примечание. Мы не знаем, имеет ли уравнение

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=4$$

решения в натуральных числах x, y, z. Такое решение имеет уравнение

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=5,$$

например $x=1$, $y=2$, $z=4$, а также уравнение

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=6,$$

например (как нашел Я. Бровкин) $x=2$, $y=12$, $z=9$.

182*. Как заметил А. Шинцель, если для данного натурального числа m натуральные числа x, y, z удовлетворяют уравнению.

$$x^3+y^3+z^3=mxyz, \qquad (1)$$

то

$$\frac{x^2y}{y^2z}+\frac{y^2z}{z^2x}+\frac{z^2x}{x^2y}=m. \qquad (2)$$

Действительно,

$$\frac{x^2y}{y^2z}=\frac{x^3}{xyz},\ \frac{y^2z}{z^2x}=\frac{y^3}{xyz},\ \frac{z^2x}{x^2y}=\frac{z^3}{xyz},$$

а на основании (1)

$$\frac{x^3}{xyz} + \frac{y^3}{xyz} + \frac{z^3}{xyz} = m.$$

Таким образом, из задач 179 и 180 вытекает, что для $m=1$ и $m=2$ уравнение (1) не имеет решений в натуральных числах x, y, z, из решения же задачи 181 следует, что для $m=3$ уравнение (1) имеет только решения, в которых $x^2y=y^2z=z^2x=n$, где n — некоторое натуральное число. Но тогда $x^2y\cdot y^2z\cdot z^2x=n^3$, или $(xyz)^3=n^3$, откуда $xyz=n$ и так как $x^2y=n$, то $\frac{z}{x}=1$, т. е. $z=x$. Далее, так как $y^2z=n$, то $\frac{x}{y}=1$, т. е. $x=y$.

Итак, должно быть $x=y=z$. Все решения уравнения (1) для $m=3$ в натуральных числах x, y, z мы получим, положив $y=z=x$, где x — произвольное натуральное число.

183. Предположим, что теорема T_1 справедлива. Если бы теорема T_2 была неверна, то существовали бы натуральные числа u, v и w, такие, что $u^3+v^3=w^3$, и, положив $x=u^2v$, $y=v^2w$, $z=w^2u$, мы вопреки теореме T_1 имели бы:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} = \frac{u^2v}{v^2w} + \frac{v^2w}{w^2u} = \frac{u^2}{vw} + \frac{v^2}{wu} = \frac{u^3+v^3}{uvw} = \frac{w^3}{uvw} = \frac{z}{x}.$$

Итак, мы доказали, что из теоремы T_1 вытекает T_2 (это доказательство нашел Шинцель).

Предположим теперь, что теорема T_1 неверна. Тогда существовали бы натуральные числа x, y, z, такие, что $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}=\frac{z}{x}$ и, значит, $x^2z+y^2x=z^2y$. Пусть $x^2z=a$, $y^2x=b$, тогда $z^2y=a+b$ и $ab(a+b)=(xyz)^3$. Пусть $d=(a, b)$, так что $a=da_1$, $b=db_1$, где $(a_1, b_1)=1$. Имеем $a+b=d(a_1+b_1)$ и $a_1b_1(a_1+b_1)d^3=(xyz)^3$, откуда находим, что $d^3\mid(xyz)^3$ и, значит, $d\mid xyz$, так что $xyz=dt$, где t — натуральное число.

Таким образом, $a_1b_1(a_1+b_1)=t^3$, а так как числа a_1b_1 и a_1+b_1 являются попарно взаимно простыми, то отсюда, как известно, вытекает, что $a_1=u^3$, $b_1=v^3$, $a_1+b_1=w^3$, где u, v и w — натуральные числа. Отсюда вопреки теореме T_2 получаем $u^3+v^3=w^3$. Таким образом, мы доказали, что из теоремы T_2 вытекает теорема T_1.

Итак, теоремы T_1 и T_2 вытекают одна из другой, следовательно, эти теоремы равносильны, ч. и т. д.

Примечание. Теорему T_2 можно доказать элементарно (хотя это и трудно). Значит, справедлива и теорема T_1.

184*. Если числа x, y, z, t натуральные, то числа $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{t}$ и $\frac{t}{x}$ рациональные положительные, произведение же их равно 1. Поэтому они

все четыре не могут быть меньше единицы. Но если хотя бы одно из них >1, то сумма их есть число >1, значит, равенство

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{t}+\frac{t}{x}=1$$

оказывается невозможным. Таким образом, мы доказали, что уравнение не имеет решений в целых положительных числах x, y, z, t.

Докажем теперь, что наше уравнение имеет бесконечно много решений в целых числах $\neq 0$. С этой целью достаточно проверить, что оно удовлетворяется числами

$$x=-n^2,\ y=n^2(n^2-1),\ z=(n^2-1)^2,\ t=-n(n^2-1),$$

где n — произвольное натуральное число >1.

185*. Лемма. Если a, b, c и d — положительные числа, не все равные между собой, то

$$\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4>abcd. \quad (1)$$

Доказательство. Предположим, что a, b, c и d — положительные числа и, например, $a\neq b$. Тогда либо $a+c\neq b+d$, либо $a+d\neq b+c$, так как если бы было $a+c=b+d$ и $a+d=b+c$, то было бы $a-b=d-c=c-d$, откуда $a-b=0$ вопреки предположению, что $a\neq b$.

Если, например, $a+c\neq b+d$, то пусть $u=a+c$, $v=b+d$; имеем $u\neq v$, следовательно, $(u-v)^2>0$, что дает $u^2+v^2>2uv$ и, значит, $(u+v)^2=u^2+v^2+2uv>4uv$. Отсюда $(a+c+b+d)^2>4(a+c)(b+d)$, а так как $(a+c)^2\geqslant 4ac$, $(b+d)^2\geqslant 4bd$, то имеем:

$$(a+b+c+d)^4>4^2(a+c)^2(b+d)^2>4^4abcd,$$

что и дает нам неравенство (1).

Итак, лемма доказана.

Предположим теперь, что для натурального числа m уравнение

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{t}+\frac{t}{x}=m$$

имеет решение в натуральных числах x, y, z, t. Произведение наших четырех слагаемых, рациональных и положительных, равно 1; если бы все слагаемые были между собой равны, то было бы $m=4$. Поэтому если m — натуральное число <4, то не все четыре положительные числа $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{t}$, $\frac{t}{x}$ между собой равны и согласно лемме

$$\left[\frac{1}{4}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{t}+\frac{t}{x}\right)\right]^4>\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{t}\cdot\frac{t}{x}=1,$$

откуда

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{t}+\frac{t}{x}>4.$$

Отсюда следует, что наше уравнение не имеет решений в натуральных числах x, y, z, t для натуральных $m<4$ и что для $m=4$ имеет только такие решения, в которых все четыре числа $\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{t}, \frac{t}{x}$ между собой равны и, следовательно, равны 1, откуда $x=y=z=t$.

Для $m=4$ наше уравнение имеет бесконечно много решений в натуральных числах x, y, z, t. Все эти решения мы можем получить, положив $y=z=t=x$, где x — произвольное натуральное число.

186. Здесь должно быть $x\leqslant 4$, так как в случае $x\geqslant 5$ на основании неравенств $x\leqslant y\leqslant z\leqslant t$ было бы:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\leqslant\frac{4}{5}<1.$$

Здесь также, очевидно, должно быть $x\geqslant 2$. Таким образом, подлежат рассмотрению только три случая: $x=2$, 3 и 4.

Предположим вначале, что $x=2$. Тогда имеем здесь уравнение

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Так как $y\leqslant z\leqslant t$, то имеем $\frac{3}{y}\geqslant\frac{1}{2}$, откуда $y\leqslant 6$, а, с другой стороны, на основании (1) имеем $\frac{1}{y}<\frac{1}{2}$, следовательно, $y\geqslant 3$. Значит, число y здесь может принимать только следующие значения: 3, 4, 5 или 6.

Если $y=3$, то $\frac{1}{6}=\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\leqslant\frac{2}{z}$, откуда $z\leqslant 12$, а так как, с другой стороны, $\frac{1}{6}>\frac{1}{z}$, то число z может принимать только значения $z=7, 8, 9, 10, 11$ или 12.

Для $z=7$ $\frac{1}{t}=\frac{1}{42}$, откуда $t=42$, что дает решение нашего уравнения: $x=2$, $y=3$, $z=7$, $t=42$.

Для $z=8$ $\frac{1}{t}=\frac{1}{24}$, откуда $t=24$, что дает решение нашего уравнения: $x=2$, $y=3$, $z=8$, $t=24$.

Для $z=9$ $\frac{1}{t}=\frac{1}{18}$, откуда $t=18$, что дает решение нашего уравнения: $x=2$, $y=3$, $z=9$, $t=18$.

Для $z=10$ $\frac{1}{t}=\frac{1}{15}$, откуда $t=15$, что дает решение нашего уравнения: $x=2$, $y=3$, $z=10$, $t=15$.

Для $z=11$ $\frac{1}{t}=\frac{5}{66}$, что для t даст дробное значение и поэтому не дает решения нашего уравнения в натуральных числах.

Для $z=12$ $\frac{1}{t}=\frac{1}{12}$, откуда $t=12$, что дает решение нашего уравнения: $x=2$. $y=3$. $z=12$, $t=12$.

Если $y=4$, то $\frac{1}{4}=\frac{1}{z}+\frac{1}{t}<\frac{2}{z}$, откуда $z\leqslant 8$, а так как $\frac{1}{4}>\frac{1}{z}$, следовательно, $z>4$, то число z может принимать только значения 5, 6, 7 или 8.

Для $z=5$ $\frac{1}{t}=\frac{1}{20}$, откуда $t=20$, что дает решение нашего уравнения: $x=2$, $y=4$, $z=5$, $t=20$.

Для $z=6$ $\frac{1}{t}=\frac{1}{12}$, откуда $t=12$, что дает решение нашего уравнения: $x=2$, $y=4$, $z=6$, $t=12$.

Для $z=7$ $\frac{1}{t}=\frac{3}{28}$, что для t дает дробное значение и поэтому не дает решения нашего уравнения в натуральных числах.

Для $z=8$ $\frac{1}{t}=\frac{1}{8}$, откуда $t=8$, что дает решение нашего уравнения: $x=2$, $y=4$, $z=8$, $t=8$.

Если $y=5$, то $\frac{3}{10}=\frac{1}{z}+\frac{1}{t}<\frac{2}{z}$, откуда $z\leqslant\frac{20}{3}$, следовательно, $z\leqslant 6$ и, так как $z\geqslant y=5$, заключаем, что z может принимать только значения 5 или 6.

Для $z=5$ $\frac{1}{t}=\frac{1}{10}$, откуда $t=10$, что дает решение нашего уравнения: $x=2$, $y=5$, $z=5$, $t=10$.

Для $z=6$ $\frac{1}{t}=\frac{2}{15}$, что для t дает дробное значение и поэтому не дает решения нашего уравнения в натуральных числах.

Если $y=6$, то $\frac{1}{3}=\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\leqslant\frac{2}{z}$, откуда $z\leqslant 6$, а так как $z\geqslant y=6$, то находим, что $z=6$, откуда $t=6$, что дает решение нашего уравнения: $x=2$. $y=6$, $z=6$, $t=6$.

Итак, мы рассмотрели случай $x=2$ и одновременно доказали, что уравнение (1) имеет в натуральных числах y, z, t (где $y\leqslant z\leqslant t$) 10 решений: 3, 7, 42; 3, 8, 24; 3, 9, 18; 3, 10, 15; 3,12, 12; 4, 5, 20; 4, 6, 12; 4, 8, 8; 5, 5, 10 и 6, 6, 6.

Предположим теперь, что $x=3$. Тогда получаем уравнение

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{2}{3},$$

откуда, в силу $y\leqslant z\leqslant t$, $\frac{3}{y}\geqslant\frac{2}{3}$; следовательно, $y\leqslant\frac{9}{2}$ и поэтому $y\leqslant 4$.

Так как $3=x\leqslant y$, то y может принимать только значения 3 или 4. Если $y=3$, то имеем $\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{1}{3}$, откуда $\frac{2}{z}\geqslant\frac{1}{3}$, следовательно, $z\leqslant 6$, а так как $\frac{1}{z}<\frac{1}{3}$, откуда $z>3$, то z может принимать только значения 4, 5 или 6.

Для $z=4$ найдем $t=12$, что дает решение нашего уравнения: $x=3$, $y=3$, $z=4$, $t=12$.

Для $z=5$ найдем $t=\frac{15}{2}$, что не дает решения нашего уравнения в натуральных числах.

Для $z=6$ найдем $t=6$, что дает решение нашего уравнения: $x=3$, $y=3$, $z=6$, $t=6$.

Если $y=4$, то имеем $\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{5}{12}\leqslant\frac{2}{z}$, откуда $z\leqslant\frac{24}{5}<5$, а так как $z\geqslant y=4$, то должно быть $z=4$, откуда $t=6$, что дает решение нашего уравнения: $x=3$, $y=4$, $z=4$, $t=6$.

Предположим теперь, что $x=4$. Здесь мы имеем уравнение

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{3}{4},$$

откуда, так как $y\leqslant z\leqslant t$, $\frac{3}{4}\leqslant\frac{3}{y}$, следовательно, $y\leqslant 4$, а так как $y\geqslant x=4$, то может быть только $y=4$. Поэтому $\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{1}{2}\leqslant\frac{2}{z}$, откуда $z\leqslant 4$, а так как $z\geqslant y=4$, то $z=4$, откуда $t=4$, что дает решение нашего уравнения: $x=4$, $y=4$, $z=4$, $t=4$.

Итак, рассмотрев все возможные случаи, мы приходим к заключению, что наше уравнение имеет в натуральных числах x, y, z, t, где $x\leqslant y\leqslant z\leqslant t$, 14 решений:

$x, y, z, t=2, 3, 7, 42$; $2, 3, 8, 24$; $2, 3, 9, 18$; $2, 3, 10, 15$; $2, 3, 12, 12$; $2, 4, 5, 20$; $2, 4, 6, 12$; $2, 4, 8, 8$; $2, 5, 5, 10$; $2, 6, 6, 6$; $3, 3, 4, 12$; $3, 3, 6, 6$; $3, 4, 4, 6$ и $4, 4, 4, 4$.

Примечание. Рассмотренное здесь уравнение имеет применение при решении задачи о заполнении плоскости правильными многоугольниками. См.: W. Sierpiński. O rozkładach liczb wymiernych na ułamki proste. Warszawa, 1957, стр. 31—42.

187. Для каждого натурального числа s наше уравнение имеет по крайней мере одно решение в натуральных числах, например $x_1=x_2=\ldots=x_s=s$.

Чтобы доказать, что оно имеет конечное число решений для каждого натурального числа s, докажем более общую теорему, что для каждого рационального числа w и для каждого натурального числа s уравнение

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_s}=w$$

имеет конечное $\geqslant 0$ число решений в натуральных числах $x_1, x_2, \ldots, x_s$. Доказательство этой теоремы проведем при помощи индукции по числу s. Теорема, очевидно, верна для $s=1$. Пусть теперь s означает данное натуральное число; предположим, что теорема наша для числа s справедлива. Предположим теперь, что натуральные числа $x_1, x_2, \ldots, x_s, x_{s+1}$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_s}+\frac{1}{x_{s+1}}=u, \qquad (1)$$

где u есть данное рациональное число, очевидно, положительное.

Полагая, что $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_s \leqslant x_{s+1}$, мы на основании (1) найдем, что $\frac{s+1}{x_1} \geqslant u$, откуда $x_1 \leqslant \frac{s+1}{u}$; таким образом, число x_1 может принимать лишь конечное число различных натуральных значений.

Выберем для x_1 какое-нибудь из этих значений; тогда для s чисел $x_2, x_3, \ldots, x_{s+1}$ будем иметь уравнение

$$\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\ldots+\frac{1}{x_s}+\frac{1}{x_{s+1}}=u-\frac{1}{x_1}, \qquad (2)$$

где при выбранном уже x_1, правая часть есть данное рациональное число, и, значит, по предположению о справедливости нашей теоремы для s чисел оно имеет конечное $\geqslant 0$ число решений в натуральных числах $x_1, x_2, \ldots, x_s, x_{s+1}$. Но так как x_1 может принимать только конечное число натуральных значений, то отсюда вытекает справедливость нашей теоремы для $s+1$ чисел.

Этим и завершается индуктивное доказательство теоремы.

188 *. Для $s=3$, как легко проверить, имеем решение нашего уравнения в натуральных возрастающих числах $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=6$. Если при данном натуральном $s \geqslant 3$ натуральные числа $x_1 < x_2 < \ldots < x_s$ удовлетворяют нашему уравнению, то, так как $s \geqslant 3$, имеем $x_1 > 1$ и поэтому $2 < 2x_1 < 2x_2 < \ldots < 2x_s$. Замечаем, что числа $t_1=2$, $t_2=2x_1$, $t_3=2x_2, \ldots, t_s=2x_{s-1}$, $t_{s+1}=2x_s$ составляют возрастающую последовательность натуральных чисел и удовлетворяют уравнению

$$\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\ldots+\frac{1}{t_s}+\frac{1}{t_{s+1}}=1. \qquad (1)$$

Таким образом, мы уже имеем l_s различных решений уравнения (1) в натуральных возрастающих числах $t_1, t_2, \ldots, t_s, t_{s+1}$. Следовательно, $l_{s+1} \geqslant l_s$, откуда следует, что для каждого натурального числа $s \geqslant 3$ уравнение $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_s}=1$ имеет по крайней мере одно решение в натуральных возрастающих числах $x_1, x_2, \ldots, x_s$.

Для $s=3$ наше уравнение имеет только одно решение в натуральных возрастающих числах. Действительно, здесь должно быть $x_1 > 1$; следо-

вательно. $x_1 \geqslant 2$, а если бы было $x_1 \geqslant 3$, мы имели бы $x_2 \geqslant 4$, $x_3 \geqslant 5$, откуда $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3} \leqslant \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}<1$, что невозможно. Итак, $x_1=2$, $x_2 \geqslant 3$, а в случае $x_2 \geqslant 4$ было бы $x_3 \geqslant 5$, откуда $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3} \leqslant \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}<1$, что невозможно. Таким образом, $x_2=3$, откуда $x_3=6$ и, значит, $l_3=1$. Но $l_4>1$, так как уравнение $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=1$ имеет в натуральных возрастающих числах решения 2, 3, 7, 42 и 2, 3, 8, 24 (имеет также и другие решения).

Итак, далее мы можем полагать, что $s \geqslant 4$. В таком случае уравнение

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_{s-1}}=1$$

имеет по крайней мере одно решение в натуральных возрастающих числах $x_1<x_2<\ldots<x_{s-1}$, а посему числа $t_1=2$, $t_2=3$, $t_3=6x_1$, $t_4=6x_2, \ldots, t_{s+1}=6x_{s-1}$ являются натуральными возрастающими числами, удовлетворяющими уравнению (1), причем это решение будет отлично от каждого из l_s решений уравнения (1), полученных ранее, так как там все числа были четные, здесь же число $t_2=3$ есть нечетное. Таким образом, $l_{s+1} \geqslant l_s+1$, следовательно, $l_{s+1}>l_s$ для $s \geqslant 3$, ч. и т. д.

189. Пусть $t_n=\frac{n(n+1)}{2}$ — n-е треугольное число. Как легко проверить,

$$\frac{1}{t_1}=1,\ \frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_2}=1,\ \frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}+\frac{1}{t_3}=1.$$

Поэтому далее можно предполагать, что s — натуральное число $\geqslant 5$. Если s есть нечетное число, $s=2k-1$, где k — натуральное число $\geqslant 3$, то

$$\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}+\ldots+\frac{1}{t_{k-1}}+\frac{k+1}{t_k}=\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{2}{(k-1)k}+\frac{2}{k}=$$
$$=2\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)\right]+\frac{2}{k}=1,$$

где левая часть есть сумма $(k-2)+(k+1)=2k-1=s$ чисел, обратных треугольным.

Если же s есть четное число, $s=2k$, где k — натуральное число $\geqslant 3$, то в случае $k=3$ $\frac{6}{t_3}=1$, в случае же $k>3$

$$\frac{2}{t_3}+\frac{1}{t_3}+\frac{1}{t_4}+\ldots+\frac{1}{t_{k-1}}+\frac{k+1}{t_k}=$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{3\cdot 4}+\frac{2}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{2}{(k-1)k}+\frac{2}{k}=1,$$

где левая часть есть сумма $(k-1)+(k+1)=2k=s$ чисел, обратных треугольным.

Ср.: W. Sierpiński. O rozkładach liczb wymiernych na ułamki proste. Warszawa, 1917, стр. 30.

190. Принимая во внимание формулу $\frac{1}{t_k}=2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$ для $k=1, 2, \ldots$, легко проверить, что для натуральных n

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{t_n}+\frac{1}{t_{n+1}}+\ldots+\frac{1}{t_{2n-1}}.$$

191. Ясно, что ни одно из натуральных чисел x, y, z, t, удовлетворяющих нашему уравнению, не может быть равно 1. Также ни одно из этих чисел не может быть $\geqslant 3$, так как, например, в случае $x=3$. $y=2$, $z=2$, $t=2$ мы имели бы:

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{t^2}=\frac{1}{9}+\frac{3}{4}=\frac{31}{36}<1,$$

что невозможно. Таким образом, должно быть $x=y=z=t=2$; это единственное решение нашего уравнения в натуральных числах.

Ср.: Matematyka, 1958, № 1 (51), стр. 64, задача 460.

192. Искомыми числами s являются числа $s=1$, 4 и все натуральные числа $s\geqslant 6$. Для $s=1$ имеем очевидное решение $x_1=1$. Для $s=2$ и для $s=3$ наше уравнение не имеет решений в натуральных числах, так как искомые числа должны были бы быть >1, следовательно, $\geqslant 2$, для таких же чисел x_1, x_2, x_3 мы имеем:

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}\leqslant\frac{1}{4}+\frac{1}{4}<1$$

и

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}\leqslant\frac{3}{4}<1.$$

Для $s=4$ имеем решение $x_1=x_2=x_3=x_4=2$.

Для $s=5$ наше уравнение не имеет решений в натуральных числах. Действительно, если бы система чисел $x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant x_4\leqslant x_5$ составляла такое решение, то должно было бы быть $x_1\geqslant 2$ и $x_1<3$, так как в случае $x_1\geqslant 3$ было бы:

$$\frac{1}{x_1^2}+\ldots+\frac{1}{x_5^2}\leqslant\frac{5}{9}<1.$$

Итак, должно быть $x_1=2$; следовательно,

$$\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}+\frac{1}{x_4^2}+\frac{1}{x_5^2}=\frac{3}{4},$$

откуда $x_2<3$. Но $\frac{4}{9}<\frac{3}{4}$, следовательно, $x_2=2$ и

$$\frac{1}{x_3^2}+\frac{1}{x_4^2}+\frac{1}{x_5^2}=\frac{1}{2}.$$

Отсюда $x_3<3$. Но $\frac{3}{9}<\frac{1}{2}$, значит, $x_3=2$ и $\frac{1}{x_4^2}+\frac{1}{x_5^2}=\frac{1}{4}$, что невозможно, так как $x_4\geqslant 2$ и $x_5\geqslant 2$.

Для $s=6$ наше уравнение, как легко проверить, имеет решение $x_1=x_2=x_3=2$, $x_4=x_5=3$, $x_6=6$.

Для $s=7$ наше уравнение, как легко проверить, имеет решение $x_1=x_2=x_3=2$, $x_4=x_5=x_6=x_7=4$.

Для $s=8$ наше уравнение, как легко проверить, имеет решение $x_1=x_2=x_3=2$, $x_4=x_5=3$, $x_6=7$, $x_7=14$, $x_8=21$. Предположим теперь, что для некоторого натурального числа s уравнение

$$\frac{1}{t_1^2}+\frac{1}{t_2^2}+\ldots+\frac{1}{t_s^2}=1$$

имеет решение в натуральных числах $t_1, t_2, \ldots, t_s$. Так как $\frac{1}{t_s^2}=\frac{4}{(2t_s)^2}$, то уравнение

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\ldots+\frac{1}{x_{s+3}^2}=1$$

имеет решение в натуральных числах $x_1=t_1$, $x_2=t_2, \ldots, x_{s-1}=t_{s-1}$, $x_s=x_{s+1}=x_{s+2}=x_{s+3}=2t_s$.

Итак, если наше уравнение разрешимо в натуральных числах для некоторого натурального числа s, то оно разрешимо в натуральных числах для числа $s+3$, а так как оно разрешимо для $s=6$, 7 и 8, то оно разрешимо для каждого натурального числа $s\geqslant 6$ (и, кроме того, еще, как мы доказали, для чисел $s=1$ и $s=4$).

193. Для $s=2$ это верно, ибо, как легко проверить,

$$\frac{1}{12^2}=\frac{1}{15^2}+\frac{1}{20^2}. \qquad (1)$$

Предположим теперь, что наше утверждение справедливо для некоторого натурального числа $s\geqslant 2$, т. е. что существуют натуральные числа

$$x_0<x_1<\ldots<x_s, \qquad (2)$$

такие, что

$$\frac{1}{x_0^2}=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\ldots+\frac{1}{x_s^2}. \qquad (3)$$

Пусть $y_0=12x_0$, $y_i=20x_i$ для $i=1, 2, \ldots, s$, $y_{s+1}=15x_0$. Тогда согласно (3) и (1) имеем:

$$\frac{1}{y_0^2}=\frac{1}{y_1^2}+\frac{1}{y_2^2}+\ldots+\frac{1}{y_{s+1}^2}.$$

Легко видеть, что все числа $y_0, y_1, \ldots, y_s, y_{s+1}$ различны. Действительно, учитывая (2), имеем $y_0<y_1<\ldots<y_{s-1}<y_s$. Кроме того, $y_0<y_{s+1}$ и $y_i\neq y_{s+1}$ для $i=1, 2, \ldots, s$, так как в противном случае

$$\frac{1}{y_0^2}=\frac{1}{12^2x_0^2}>\frac{1}{y_i^2}+\frac{1}{y_{s+1}^2}=\frac{2}{15^2x_0^2},$$

что невозможно.

Таким образом, доказательство получается индукцией по числу s[1].

Примечание. П. Эрдёш доказал, что для каждого рационального числа w, где $0<w<\frac{\pi^2}{6}-1$, существуют натуральные числа n и $x_1<x_2<\ldots<x_n$, такие, что $w=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\ldots+\frac{1}{x_n^2}$.

Доказательство Эрдёша не было опубликовано (см. P. Erdös. Quelques problémes de la Théorie des Nombres, Monographies de l'Enseignement Mathématique, 1963, № 6, стр. 135, задача 75) [11].

Заметим, что уже для числа $\frac{1}{2}$ нелегко найти соответствующее разложение (см. задачу 195).

194. Предположим, что при некотором натуральном $n>1$

$$1=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\ldots+\frac{1}{x_n^2},$$

где $x_1<x_2<\ldots<x_n$ — натуральные числа.

Так как $n>1$, то здесь должно быть $x_1>1$ и $x_k\geqslant k+1$ для $k=1, 2, \ldots, n$; следовательно,

$$1=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\ldots+\frac{1}{x_n^2}\leqslant\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Но $\frac{1}{(k+1)^2}<\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ для $k=1, 2, \ldots, n$, откуда

$$1<\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1},$$

что невозможно.

[1] Приведенное здесь доказательство содержит существенные исправления, принадлежащие переводчику. — *Прим. ред.*

195. $\frac{1}{2}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{12^2}+\frac{1}{14^2}+\frac{1}{21^2}+$ $+\frac{1}{36^2}+\frac{1}{45^2}+\frac{1}{60^2}$. (Проверка: $\frac{1}{7^2}+\frac{1}{14^2}+\frac{1}{21^2}=\frac{1}{6^2}$, $\frac{1}{45^2}+\frac{1}{60^2}=\frac{1}{36^2}$, остальные слагаемые легко приводятся к общему знаменателю 36^2).

Мы не знаем, существует ли разложение числа $\frac{1}{2}$ в сумму менее чем 12 чисел, обратных квадратам различных натуральных чисел [12].

196*. Пусть m — данное натуральное число. Для $s=2^m$ наше уравнение имеет решение в натуральных числах $x_1=x_2=\ldots=x_s=2$.

Пусть теперь a — данное натуральное число; предположим, что наше уравнение имеет решение в натуральных числах для данного натурального s, т. е. что найдутся такие натуральные $t_1, t_2, \ldots, t_s$, что

$$\frac{1}{t_1^m}+\frac{1}{t_2^m}+\ldots+\frac{1}{t_s^m}=1,$$

а так как $\frac{1}{t_s^m}=\frac{a^m}{(at_s)^m}$, то для $x_1=t_1, x_2=t_2, \ldots, x_{s-1}=t_{s-1}, x_s=x_{s+1}=$ $=\ldots=x_{s+a^m-1}=at_s$ справедливо равенство

$$\frac{1}{x_1^m}+\frac{1}{x_2^m}+\ldots+\frac{1}{x_{s+a^m-1}^m}=1.$$

Таким образом, если наше уравнение имеет решение в натуральных числах для числа s, то оно имеет также решение в натуральных числах для числа $s+a^m-1$ и, вообще, для числа $s+(a^m-1)k$, где k — произвольное натуральное число. Отсюда, полагая $a=2$ и $a=2^m-1$, найдем (для $s=2^m$), что наше уравнение имеет решение для каждого числа

$$s=2^m+(2^m-1)k+[(2^m-1)^m-1]l,$$

где k и l — произвольные натуральные числа.

Числа 2^m-1 и $(2^m-1)^m-1$ являются, очевидно, взаимно простыми. Отсюда на основании теоремы, доказанной в книге: W. Sierpiński. Teoria liczb, Część II. Warszawa, 1959, стр. 10, следствие 1[1], вытекает, что каждое достаточно большое натуральное число есть число вида

$$(2^m-1)k+[(2^m-1)^m-1]l,$$

где k и l — натуральные числа.

[1] Если a и b — натуральные взаимно простые числа, то каждое натуральное число $n>ab$ представимо в виде $n=ax+by$, где x и y — натуральные. — *Прим. перев.*

Отсюда следует, что каждое достаточно большое натуральное число является также числом вида

$$2^m+(2^m-1)k+[(2^m-1)^m-1]l$$

и, значит, для каждого такого натурального числа s наше уравнение разрешимо в натуральных числах.

197. Очевидно, достаточно доказать, что наше уравнение имеет для каждого натурального числа s по крайней мере одно решение в натуральных числах $x_1, x_2, \ldots, x_{s+1}$, так как, умножая все эти числа на произвольное натуральное число, мы также получим решение нашего уравнения.

Для $s=1$, очевидно, имеем решение $x_1=x_2=1$.

Для $s=2$ имеем решение

$$\frac{1}{15^2}+\frac{1}{20^2}=\frac{1}{12^2}.$$

Пусть теперь s — данное натуральное число; предположим, что наше уравнение имеет решение в натуральных числах

$$\frac{1}{t_1^2}+\frac{1}{t_2^2}+\ldots+\frac{1}{t_s^2}=\frac{1}{t_{s+1}^2}.$$

Так как

$$\frac{1}{(12t_s)^2}=\frac{1}{(15t_s)^2}+\frac{1}{(20t_s)^2},$$

то натуральные числа $x_i=12t_i$ для $i=1, 2, \ldots, s-1$, $x_s=15t_s$, $x_{s+1}=20t_s$, $x_{s+2}=12t_{s+1}$ будут удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\ldots+\frac{1}{x_s^2}+\frac{1}{x_{s+1}^2}=\frac{1}{x_{s+2}^2},$$

так что искомое доказательство получается индукцией по числу s.

198. Достаточно доказать, что для каждого натурального числа $s\geqslant 3$ наше уравнение имеет по крайней мере одно решение в натуральных числах $x_1, x_2, \ldots, x_s, x_{s+1}$. Для $s=3$ оно имеет решение

$$\frac{1}{12^3}+\frac{1}{15^3}+\frac{1}{20^3}=\frac{1}{10^3}$$

(которое получается в результате деления обеих частей равенства $3^3+4^3+5^3=6^3$ на 60^3), а для $s=4$ оно имеет решение

$$\frac{1}{(5\cdot 7\cdot 13)^3}+\frac{1}{(5\cdot 12\cdot 13)^3}+\frac{1}{(7\cdot 12\cdot 13)^3}+\frac{1}{(5\cdot 7\cdot 12\cdot 13)^3}=\frac{1}{(5\cdot 7\cdot 12)^3}$$

(которое получается в результате деления обеих частей равенства $1^3+5^3+7^3+12^3=13^3$ на $(5\cdot 7\cdot 12\cdot 13)^3$).

Пусть теперь s означает данное натуральное число $\geqslant 3$; предположим, что наше уравнение для числа s имеет решение в натуральных числах, т. е. что существуют натуральные числа $t_1, t_2, \ldots, t_s, t_{s+1}$, такие, что

$$\frac{1}{t_1^3}+\frac{1}{t_2^3}+\ldots+\frac{1}{t_s^3}=\frac{1}{t_{s+1}^3}.$$

Полагая $x_i=10t_i$ для $i=1, 2, \ldots, s-1$, $x_s=12t_s$, $x_{s+1}=15t_s$, $x_{s+2}=20t_s$, $x_{s+3}=10t_{s+1}$, получим:

$$\frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3}+\ldots+\frac{1}{x_{s+2}^3}=\frac{1}{x_{s+3}^3}.$$

Таким образом, если наше уравнение разрешимо в натуральных числах для числа s, то оно также разрешимо в натуральных числах для числа $s+2$. Отсюда, так как оно разрешимо в натуральных числах для $s=3$ и $s=4$, заключаем, что оно разрешимо в натуральных числах для каждого натурального числа $s\geqslant 3$, ч. и т. д.

Примечание. Можно доказать элементарно, что для $s=2$ наше уравнение не имеет решений в натуральных числах (доказательство трудное).

199 *. Решение, найденное А. Шинцелем. Имеем тождество

$$(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)=3(x+y)(x+z)(y+z). \quad (1)$$

Если x, y, z — целые числа, $x+y+z=3$ и $x^3+y^3+z^3=3$, то на основании тождества (1)

$$8=(x+y)(x+z)(y+z)=(3-x)(3-y)(3-z), \quad (2)$$

а так как $x+y+z=3$, то

$$6=(3-x)+(3-y)+(3-z). \quad (3)$$

Из (3) следует, что среди чисел $3-x$, $3-y$, $3-z$ либо все, либо только одно четное. В первом случае согласно (2) все они по абсолютной величине равны 2, а на основании (3) равны 2 и тогда $x=y=z=1$. В другом случае, согласно (2) одно из чисел $3-x$, $3-y$, $3-z$ по абсолютной величине равно 8, остальные же по абсолютной величине равны 1, следовательно, на основании (3) одно из них равно 8, а остальные равны -1. Следовательно, $x=-5$, $y=z=4$, или $x=y=4$, $z=-5$, либо, наконец, $x=4$, $y=-5$, $z=4$.

Таким образом, наша система уравнений имеет в целых числах x, y, z только четыре решения: $x, y, z=1, 1, 1$; $-5, 4, 4$; $4, -5, 4$; $4, 4, -5$.

Ср.: American Mathematical Monthly, **69**, 1962, стр. 1009, задача E 1355.

Примечание. Неизвестно, имеет ли уравнение $x^3+y^3+z^3=3$ еще решения в целых числах x, y, z, кроме четырех, найденных здесь

200. Здесь, очевидно, должно быть $n \geqslant 8$. Если $n=3k$, где k — натуральное число >5, то для $x=k-5$, $y=3$ имеем $3x+5y=n$. Если $n=3k+1$, где k — натуральное число >3, то для $x=k-3$, $y=2$ имеем $3x+5y=n$. Наконец, если $n=3k+2$, где k — натуральное число >1, то для $x=k-1$, $y=1$ имеем $3x+5y=n$. Отсюда следует, что наше уравнение имеет по крайней мере одно решение в натуральных числах x, y для каждого натурального числа $n>15$. Таким образом, остается исследовать еще только числа $n=8$, 9, 10, 12 и 15. Для $n=8$ имеем решение $x=y=1$. Для $n=9$, 12 и 15 наше уравнение не имеет решений в натуральных числах x, y, так как в этих случаях мы имели бы $3|5y$, следовательно, $3|y$ и $15|5y$, откуда $n=3x+5y>5y\geqslant 15$, что невозможно. Для $n=10$ наше уравнение также не имеет решений в натуральных числах x, y, так как тогда было бы $5|3x$, откуда $5|x$ и $15|3x$, следовательно, $n=3x+5y>15$.

Итак, наше уравнение имеет по крайней мере одно решение в натуральных числах x, y для всех натуральных чисел n, за исключением чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12 и 15.

Ср.: Matematyka, 1954, № 4 (32), стр. 54, задача 390, и W. Sierpiński. Teoria liczb, Cz. II, 1959, стр. 14, упражнение 2.

Пусть теперь m — произвольное натуральное число и пусть n — натуральное число $>40m$. Тогда уравнение $3x+5y=n$ имеет решение в натуральных числах x_0, y_0, из которых хотя бы одно должно быть $>5m$, так как в случае $x_0\leqslant 5m$ и $y_0\leqslant 5m$ было бы $3x_0+5y_0\leqslant 40m<n$. Если $x_0>5m$, то для $k=0, 1, 2, \ldots, m$ числа $x=x_0-5k$ и $y=y_0+3k$ являются натуральными и удовлетворяют уравнению $3x+5y=3x_0+5y_0=n$. Если же $y_0>5m$, то для $k=0, 1, 2, \ldots, m$ числа $x=x_0+5k$ и $y=y_0-3k$ являются натуральными и удовлетворяют уравнению $3x+5y=n$. Таким образом, последнее для $n>40m$ имеет более чем m решений в натуральных числах x, y, и, значит, число таких решений нашего уравнения возрастает неограниченно вместе с n.

201. а) $n=2$, $y=x$, $z=x+1$, где x — произвольное натуральное число. Действительно, для натуральных x имеем $2^x+2^x=2^{x+1}$. С другой стороны, предположим, что для натуральных n, x, y и z имеем $n^x+n^y=n^z$. Мы можем считать, что $x\leqslant y<z$. Здесь не может быть $n=1$, следовательно, $n\geqslant 2$. Имеем $n^x=n^z-n^y=n^x(n^{z-x}-n^{y-x})$, откуда $n^{z-x}-n^{y-x}=1$. Если бы было $y>x$, мы имели бы $n|1$, что невозможно. Таким образом, $y=x$, откуда $n^{z-x}=2$, следовательно, $n=2$, $z-x=1$. Итак, $n=2$, $y=x$, $z=x+1$.

Примечание. Уравнение $n^x+n^y=n^z$ получается из уравнения Ферма $x^n+y^n=z^n$, если поменять ролями основания и показатели степеней. Ср. Mem. Real. Acad. Sci. Art. Barcelona, 34, 1961, стр. 17—25.

б) Предположим, что натуральные числа n, x, y, z и t удовлетворяют уравнению

$$n^x+n^y+n^z=n^t, \tag{1}$$

где мы можем считать, что $x\leqslant y\leqslant z<t$. Здесь не может быть $n=1$. Если $n=2$, то из (1) мы получим $1+2^{y-x}+2^{z-x}=2^{t-x}$, откуда видно, что не может быть $y>x$. Таким образом, $y=x$, откуда $2+2^{z-x}=2^{t-x}$, что, как легко заметить, дает $z-x=1$ и, следовательно, $t-x=2$. Итак, если $n=2$, то должно быть $y=x$, $z=x+1$, $t=x+2$ и, как легко проверить, при всяком натуральном x $2^x+2^x+2^{x+1}=2^{x+2}$.

Предположим далее, что $n\neq 2$, следовательно $n\geqslant 3$. Согласно (1) имеем $1+n^{y-x}+n^{z-x}=n^{t-x}$, откуда заключаем, что здесь должно быть $y=x$, что дает $2+n^{z-x}=n^{t-x}$, а так как $n>2$, то должно быть $z-x=0$; следовательно, $3=n^{t-x}$, что дает $n=3$ и $t-x=1$. Следовательно, если $n\neq 2$, то должно быть $n=3$, $x=y=z$, $t=x+1$. Легко проверить, что при произвольном натуральном x $3^x+3^x+3^x=3^{x+1}$.

Итак, окончательно заключаем, что всеми решениями уравнения (1) в натуральных числах n, x, y, z и t, где $x\leqslant y\leqslant z<t$, являются $n=2$, $y=x$, $z=x+1$, $t=x+2$, где x — произвольное натуральное число, либо $n=3$, $y=x$, $z=x$, $t=x+1$, где x — произвольное натуральное число.

в) Из решения предыдущей задачи непосредственно вытекает, что уравнение $4^x+4^y+4^z=4^t$ не имеет решений в натуральных числах x, y, z и t. Действительно, если бы такое решение существовало, мы имели бы $2^{2x}+2^{2y}+2^{2z}=2^{2t}$ и в случае $x\leqslant y\leqslant z<t$ из решения предыдущей задачи вытекало бы, что должно быть $2z-2x=1$, а это невозможно.

Заметим, что наше уравнение можно получить, поменяв ролями основания и показатели степеней в уравнении $x^4+y^4+z^4=t^4$, относительно которого до сих пор неизвестно, имеет ли оно решение в натуральных числах x, y, z, t или же нет, что предполагал Эйлер [13].

VI. Разные задачи

202. Доказательство вытекает непосредственно из тождества

$$(3x+4y)^2-2(2x+3y)^2=x^2-2y^2$$

и замечания, что для натуральных x и y имеем $3x+4y>x$ и $2x+3y>y$.

203. Если при целых x и y число x^2-2y^2 является нечетным, то число x должно быть нечетным и, следовательно, $x^2\equiv 1 \pmod 8$; в случае, когда y — четное число, $2y^2\equiv 0 \pmod 8$; в случае, когда y — нечетное, $2y^2\equiv 2 \pmod 8$. Таким образом, если x^2-2y^2 есть нечетное число, то $x^2-2y^2\equiv \pm 1 \pmod 8$; т. е. при целых x и y число x^2-2y^2 не может быть числом вида $8k+3$ или вида $8k+5$, где k — целое число.

204. При произвольном натуральном n число $(2n+1)^2-2\cdot 2^2$, как легко заметить, есть число вида $8k+1$, где k — целое число $\geqslant 0$. Далее, имеем: $1=3^2-2\cdot 2^2$, $9=9^2-2\cdot 6^2$, $17=5^2-2\cdot 2^2$, $25=15^2-2\cdot 10^2$, однако число 33 невозможно представить в виде x^2-2y^2, где x и y — натуральные чис-

ла. Докажем, что ни одно число вида $72t+33$, где $t=0, 1, 2, \ldots$, не представимо в виде x^2-2y^2, где x и y — целые числа. В самом деле, предположим, что $72t+33=x^2-2y^2$, где t, x и y — целые числа. Замечаем, что левая часть равенства делится на 3, но не делится на 9. Отсюда следует, что ни одно из чисел x и y не делится на 3. Действительно, если $3|x$, то $3|y$, а если $3|y$, то $3|x$; но тогда правая часть нашего равенства делилась бы на 9, что невозможно. Итак, числа x и y не делятся на 3, откуда, как мы знаем, следует, что числа x^2 и y^2 при делении на 3 дают в остатке 1 и, значит, число x^2-2y^2 при делении на 3 дает в остатке 2, что невозможно, так как левая часть нашего равенства делится на 3.

Таким образом, существует бесконечно много натуральных чисел вида $8k+1$ (где $k=1, 2, \ldots$), не являющихся числами вида x^2-2y^2, где x и y — целые числа, и наименьшее из них есть число $33=8\cdot 4+1$.

205. Четные совершенные числа — это числа вида $2^{p-1}(2^p-1)$, где p и 2^p-1 — простые числа (см., например: W. Sierpiński. Czym się zajmuje teoria liczb. Warszawa, 1957, стр. 136). Для $p=2$ имеем число 6. Если же $p>2$, то p — простое число вида $4k+1$ или $4k+3$.

Если $p=4k+1$, то $2^{p-1}=2^{4k}=16^k$ и последняя цифра числа 2^{p-1} есть, очевидно, 6, последняя же цифра числа $2^p-1=2^{4k+1}-1=2\cdot 16^k-1$ есть, как легко заметить, 1. Таким образом, последняя цифра произведения $2^{p-1}(2^p-1)$ есть 6. Если же $p=4k+3$, то число $2^{p-1}=2^{4k+2}=4\cdot 16^k$ и последняя цифра этого числа есть 4. Последняя же цифра числа 2^p есть 8, и поэтому последняя цифра числа 2^p-1 есть 7. Следовательно, последняя цифра числа $2^{p-1}(2^p-1)$ (как произведения числа с последней цифрой 4 на число с последней цифрой 7) есть 8.

Таким образом, теорема доказана.

Примечание. Несколько труднее доказывается теорема о том, что если последняя цифра совершенного числа есть 8, то ее предпоследняя цифра есть 2.

206. Значение нашей дроби при основании g есть

$$\frac{1+g^2+g^4+g^6+g^8}{1+g+g^4+g^7+g^8},$$

и нужно доказать, что для каждого натурального числа k оно равно дроби

$$\frac{1+g^2+g^4+g^5+\ldots+g^{2k+2}+g^{2k+4}+g^{2k+6}}{1+g+g^4+g^5+\ldots+g^{2k+2}+g^{2k+5}+g^{2k+6}}; \qquad (1)$$

равенство дробей вытекает из того, что, как легко проверить, произведения числителя каждой из двух дробей на знаменатель другой дроби между собой равны. Ср. S. Anning. Scripta Mathematica, 22, 1956, стр. 227.

Примечание. Я. Бровкин заметил, что для натуральных k справедливы тождества

$$1+g^2+g^4+g^5+\ldots+g^{2k+2}+g^{2k+4}+g^{2k+6}=(1-g+g^2-g^3+g^4)(1+g+g^2+\ldots+g^{2k+2}),$$
$$1+g+g^4+g^5+\ldots+g^{2k+2}+g^{2k+5}+g^{2k+6}=(1-g^2+g^4)(1+g+g^2+\ldots+g^{2k+2}),$$

на основании которых дробь (1) для $k=1, 2, \ldots$ равна дроби

$$\frac{1-g+g^2-g^3+g^4}{1-g^2+g^4}$$

и поэтому ее значение не зависит от натурального числа k.

207*. А. Шинцель доказал более общую теорему, именно, что если g — четное натуральное число, не делящееся на 10, то сумма цифр числа g^n (записанного в десятичной системе счисления) возрастает неограниченно вместе с n. Вот его доказательство.

Определим бесконечную последовательность целых чисел a_i ($i=0, 1, 2, \ldots$) следующим образом: $a_0=0$ и для $k=0, 1, 2, \ldots$ пусть a_{k+1} означает наименьшее натуральное число, такое, что $2^{a_{k+1}}>10^{a_k}$ (таким образом, $a_1=1$, $a_2=4$, $a_3=14$ и т. д.).

Итак, имеем $a_0<a_1<a_2<\ldots$.

Докажем, что если при натуральном k $n\geqslant a_k$, то сумма цифр числа g^n будет $\geqslant k$. Пусть c_j — цифра десятичного разложения числа g^n, стоящая при 10^j. Так как g есть четное число, то $2^n|g^n$ и так как $n\geqslant a_k$, то $2^{a_i}|g^n$ для $i=1, 2, \ldots, k$. Поэтому, учитывая, что $2^{a_i}|10^{a_i}$, имеем:

$$2^{a_i}|c_{a_i-1}\cdot 10^{a_i-1}+\ldots+c_0.$$

Если бы для $a_{i-1}\leqslant j<a_i$ все цифры c_j были равны нулю, то мы имели бы:

$$2^{a_i}|c_{a_{i-1}-1}\cdot 10^{a_{i-1}-1}+\ldots+c_0$$

и, так как $c_0\neq 0$, также

$$2^{a_i}\leqslant c_{a_{i-1}-1}\cdot 10^{a_{i-1}-1}+\ldots+c_0<10^{a_{i-1}},$$

откуда $2^{a_i}<10^{a_{i-1}}$ вопреки определению числа a_i. Следовательно, по крайней мере одна из цифр c_j, где $a_{i-1}\leqslant j<a_i$, отлична от нуля.

Но последнее заключение справедливо для $i=1, 2, \ldots, k$; следовательно, число g^n имеет по крайней мере k цифр, отличных от нуля. Поэтому для достаточно больших n (для $n\geqslant a_k$) сумма цифр числа g^n не меньше произвольно заданного натурального числа k и, значит, сумма цифр числа g^n возрастает неограниченно вместе с n, ч. и т. д.

Подобным образом, как заметил Шинцель, можно доказать, что если g — натуральное нечетное число, делящееся на 5, то сумма цифр числа g^n возрастает неограниченно вместе с n.

В частности, из доказанной здесь теоремы Шинцеля следует (для $g=2$), что сумма цифр числа 2^n возрастает неограниченно вместе с n. Однако она не возрастает монотонно: например, сумма цифр числа 2^3 есть 8, сумма же цифр числа 2^4 есть 7, а сумма цифр числа 2^5 есть 5; сумма цифр числа 2^9 есть 8, сумма же цифр числа 2^{10} есть 7; сумма цифр числа 2^{16} есть 25, сумма же цифр числа 2^{17} есть 14.

208*. Доказательство А. Шинцеля.

Пусть k — данное натуральное число >1, а c — произвольно заданная цифра десятичной системы счисления. Так как $k>1$, то мы легко докажем (например, при помощи математической индукции), что $10^{k-1}>2\cdot 2^k$.

Пусть t означает наименьшее целое число, такое, что $t\geqslant c\cdot\frac{10^{k-1}}{2^k}$;

тогда

$$t<c\cdot\frac{10^{k-1}}{2^k}+1,\text{ откуда } t+1<c\cdot\frac{10^{k-1}}{2^k}+2.$$

Из целых неотрицательных чисел t и $t+1$ по крайней мере одно не делится на 5; обозначим его через u. Таким образом,

$$c\cdot\frac{10^{k-1}}{2^k}\leqslant u<c\cdot\frac{10^{k-1}}{2^k}+2,$$

и так как $2\cdot 2^k<10^{k-1}$, то для $l=2^k\cdot u$ имеем:

$$c\cdot 10^{k-1}\leqslant l<(c+1)\,10^{k-1},$$

откуда видно, что число $l=2^k\cdot u$ имеет k цифр, первая из которых (или, иначе говоря, k-я от конца) есть c (эта цифра может быть и нулем).

Так как $l=2^k\cdot u$, то имеем $2^k|l$, а из определения числа u следует, что $5\nmid u$, так что $(l, 5)=1$.

Как известно, число 2 является первообразным корнем для модуля 5^k (см. например: W. Sierpiński. Sur les puissances du nombre 2, Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, 23, 1950, стр. 246, лемма). Так как $(l, 5)=1$, то существует натуральное число $n\geqslant k$, такое, что $2^n\equiv l \pmod{5^k}$. Но $2^k|l$ и $2^k|2^n$, поэтому также $2^n\equiv l \pmod{2^k}$. Таким образом, $2^n\equiv l \pmod{10^k}$, т. е. k последних цифр числа l соответственно те же самые, что и у числа 2^n.

Отсюда следует, что k-я от конца цифра числа 2^n есть c, ч. и т. д.

Примечание. Последними четырьмя цифрами степени двойки не могут быть цифры $111c$, где $c=2$, 4, 6 или 8, так как ни одно из чисел 1112, 1114, 1116 и 1118 не делится на 16.

В цитированной выше работе мы доказали (на стр. 249), что третья и вторая от конца цифры числа 2^n, где $n=3, 4, \ldots$, могут быть произвольными. Там же мы доказали, что если m — произвольное натуральное число, а k — число его цифр, то существует натуральное число n, такое, что k первых цифр числа 2^n соответственно те же самые, что и цифры числа m.

А. Роткевич доказал (Sur les chiffres initiaux et finals des nombres a^n et $a^n \pm b^n$, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 12, 1963, стр. 150—154), что если a — данное натуральное число >1, такое, что $(a, 10)=1$, 2^{α} и 5^{β} — наивысшие степени чисел 2 и 5, делящие a^4-1, и $\gamma=\max(\alpha, \beta)$, то для любых двух последовательностей цифр (десятичной системы) $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и $b_1, b_2, \ldots, b_k$ существует произвольно большое число s, такое, что m первыми цифрами числа a^s являются последовательно $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и на местах с номерами $\gamma+k, \gamma+k-1, \ldots, \gamma+1$ от конца стоят последовательно цифры $b_1, b_2, \ldots, b_k$.

209. Для натуральных $n \geqslant 4$ имеем $5^{n+4}-5^n=5^n(5^4-1)=5^n \cdot 16 \cdot 39$; следовательно, $5^{n+4} \equiv 5^n \pmod{10\,000}$, откуда вытекает, что последние четыре цифры последовательности 5^n $(n=4, 5, \ldots)$ составляют четырехчленный период, именно следующий период: 0625, 3125, 5625, 8125. Этот период не является чистым, так как числа 5, $5^2=25$ и $5^3=125$ не принадлежат ему.

210. Пусть s — данное натуральное число, $c_1, c_2, \ldots, c_s$ — произвольная последовательность s цифр десятичной системы. Пусть $m=(c_1c_2 \ldots c_s)_{10}$ есть s-значное число, цифрами которого являются последовательно $c_1, c_2, \ldots, c_s$. Выберем натуральное число k так, чтобы было $2\sqrt{m}<10^{k-1}$, и пусть $n=[10^k\sqrt{m}]+1$, где $[x]$ — наибольшее целое число $\leqslant x$. Имеем:

$$10^k\sqrt{m}<n\leqslant 10^k\sqrt{m}+1,$$

откуда

$$10^{2k}\cdot m<n^2\leqslant 10^{2k}\cdot m+2\cdot 10^k\sqrt{m}+1<10^{2k}\cdot m+10^{2k-1}+1<10^{2k}\cdot m+10^{2k}-1;$$

следовательно,

$$10^{2k}\cdot m<n^2<10^{2k}\cdot m+(10^{2k}-1),$$

т. е.

$$(c_1c_2 \ldots c_s00 \ldots 0)_{10}<n^2<(c_1c_2 \ldots c_s99 \ldots 9)_{10},$$

где и нулей, и девяток по $2k$. Отсюда вытекает, что первыми s цифрами числа n^2 являются последовательно $c_1, c_2, \ldots c_s$.

211. Если n — натуральное число, то число $n^{n+20}-n^n=n^n(n^{20}-1)$ делится на 4. Действительно, если n — четное, то $4|n^n$, если же n — нечетное, то n^{10} есть число нечетное и, значит, его квадрат n^{20} при делении на 8 дает в остатке 1, откуда $8|n^{20}-1$.

Таким образом, для любых натуральных n числа $n^{n+20}-n^n$ и числа $(n+20)^{n+20}-n^n$ делятся на 4.

Но если a и b являются натуральными числами, такими, что $a>b$ и $4|a-b$, то для натуральных n имеем $5|n^a-n^b$. В самом деле, $a=b+4k$, где k — натуральное число, так что $n^a-n^b=n^b(n^{4k}-1)$. Если $5|n$, то первый сомножитель правой части равенства делится на 5, если же $5 \nmid n$, то на основании малой теоремы Ферма имеем $n^4\equiv 1 \pmod 5$, откуда

$n^{4k} \equiv 1 \pmod 5$ и, значит, второй сомножитель правой части нашего равенства делится на 5. Итак, мы доказали, что если a и b являются натуральными числами, $a > b$ и $4 | a - b$, то для натуральных n имеем $5 | n^a - n^b$ и, очевидно, также $5 | (n+20)^a - n^b$. В частности, для $a = (n+20)^{n+20}$, $b = n^n$, как доказано выше, $4 | a - b$, следовательно, $5 | (n+20)^{(n+20)^{n+20}} - n^{n^n}$, а так как правая часть этой формулы есть всегда число четное (так как числа n и $n+20$ являются одновременно четными или одновременно нечетными), то для натуральных n имеем:

$$10 | (n+20)^{(n+20)^{n+20}} - n^{n^n},$$

откуда следует, что числа $(n+20)^{(n+20)^{n+20}}$ и n^{n^n} имеют одну и ту же последнюю цифру. Таким образом, последовательность, состоящая из последних цифр чисел n^{n^n} ($n = 1, 2, 3, \ldots$), является периодической, причем ее период чистый, содержащий не более 20 членов. Как легко подсчитать, период содержит точно 20 членов, которыми являются последовательно цифры

1, 6, 7, 6, 5, 6, 3, 4, 9, 0, 1, 6, 3, 6, 5, 6, 3, 4, 9, 0.

212. Пусть m — произвольно заданное натуральное число. Разобьем данную бесконечную десятичную дробь на отрезки, по m цифр в каждом. Таких отрезков будет бесконечно много. С другой стороны, различных систем, состоящих из m цифр, существует только 10^m, т. е. конечное число. Следовательно, хотя бы одна из этих систем должна повторяться здесь бесконечно много раз.

Ср. Matematyka, № 1 (18), стр. 50, задача 269.

Примечание. Для иррациональных чисел $\sqrt{2}$, π или e мы даже не знаем, какая цифра повторяется бесконечно много раз в представляющих их бесконечных десятичных дробях, хотя каждое из этих чисел, как легко можно доказать, содержит по крайней мере две различные такие цифры.

213. а) Если

$$3^{2k} = (n+1) + (n+2) + \ldots + (n+3^k),$$

то

$$3^{2k} = 3^k n + \frac{1}{2} 3^k (3^k + 1),$$

откуда $n = \frac{3^k - 1}{2}$. Итак, число 3^{2k} есть сумма 3^k слагаемых, являющихся последовательными натуральными числами, наименьшее из которых есть число $n + 1 = \frac{3^k + 1}{2}$. Так, например (для $k = 1, 2, 3$), $3^2 = 2 + 3 + 4$, $3^4 = 5 + 6 + \ldots + 13$, $3^6 = 14 + 15 + \ldots + 40$.

Ср. M. N. Khatri. Scripta Mathematica, 20, 1954, стр. 57.

б) Числа F_n ($n=2, 3, \dots$) нечетные. Поэтому если бы число F_n было бы суммой двух простых чисел, то одно из них было бы четным, т. е. числом 2, а другое, т. е. число F_n-2, было бы простым. Но

$$F_n-2=2^{2^n}-1=(2^{2^{n-1}}-1)(2^{2^{n-1}}+1)$$

для $n>1$ есть составное число, так как тогда $2^{2^{n-1}}-1\geqslant 3$.

214. Как известно, если a и b — положительные вещественные числа, такие, что $b-a>1$, то между a и b лежит по крайней мере одно натуральное число. Действительно, таковым является число $[a]+1$, где $[x]$ — наибольшее целое число $\leqslant x$, ибо, как известно, имеем $a<[a]+1\leqslant a+1<b$ (так как $b-a>1$).

Пусть s — данное натуральное число >1. Тогда

$$\mu_s=\frac{1}{\left(\sqrt[s]{2}-1\right)^s}$$

есть положительное вещественное число. Для натуральных $n>\mu_s$ имеем:

$$n>\frac{1}{\left(\sqrt[s]{2}-1\right)^s},$$

откуда

$$\sqrt[s]{n}>\frac{1}{\sqrt[s]{2}-1} \text{ и } \sqrt[s]{n}\left(\sqrt[s]{2}-1\right)>1;$$

следовательно,

$$\sqrt[s]{2n}-\sqrt[s]{n}=\sqrt[s]{n}\left(\sqrt[s]{2}-1\right)>1$$

и поэтому существует натуральное число k, такое, что

$$\sqrt[s]{n}<k<\sqrt[s]{2n}, \text{ откуда } n<k^s<2n.$$

Таким образом, за m_s мы можем принять число $[\mu_s]+1$.

Для $s=2$ имеем $[\mu_2]=5$, и уже между 5 и 10 содержится квадратное число 3^2, а между 4 и 8 нет ни одного квадратного числа.

Следовательно, наименьшее число m_2 есть 5. Легко было бы подсчитать наименьшее число m_3, оно равно 33.

215. Пусть m — произвольное натуральное число. Согласно китайской теореме об остатках существует натуральное число x, такое, что для $i=1, 2, \dots, m$

$$x\equiv p_i-i+1 \pmod{p_i^2}, \qquad (1)$$

где p_i — i-е по порядку простое число.

Отрезок натурального ряда чисел, состоящий из m чисел: $x, x+1, \ldots$ $\ldots, x+m-1$, обладает заданным свойством, так как согласно (1) для $i=1, 2, \ldots, m$ имеем $x+i-1= p_i^2 k_i+p_i$, где k_i — целое число, следовательно, число $x+i-1$ делится на простое число p_i, но не делится на p_i^2 и, таким образом, это число не может быть степенью натурального числа с натуральным показателем >1.

216. $u_n=3^{n-1}$ для $n=1, 2, \ldots$. Доказательство легко проводится при помощи математической индукции.

217. $u_n=(2-n)a+(n-1)b$ для $n=1, 2, \ldots$. Доказательство легко проводится при помощи математической индукции.

218. $u_n=(-1)^n[(n-2)a+(n-1)b]$ для $n=1, 2, \ldots$. Формула справедлива, как легко проверить, для $n=1$ и для $n=2$. Полагая, что при некотором натуральном n она справедлива для u_n и для u_{n+1}, при помощи формулы $u_{n+2}=-(u_n+2u_{n+1})$ мы легко убедимся, что она справедлива для u_{n+2}. Таким образом, доказательство получается при помощи математической индукции.

В частности, для $a=1$, $b=-1$ имеем $u_n=(-1)^{n+1}$ и для $a=1$, $b=-2$ получим $u_n=(-1)^{n+1}\cdot n$.

219. $u_n=\frac{3}{4}[3^{n-2}+(-1)^{n-1}]a+\frac{1}{4}[3^{n-1}+(-1)^n]b$ для $n=1, 2, 3, \ldots$. Доказательство проводится по индукции.

220. Существует только два таких целых числа: $a=1$ и $a=-1$. Легко проверить, что оба эти числа удовлетворяют заданному условию. Из этого условия для $n=1$ получается, что $a^a=a$. Таким образом, если бы a было целым числом $\geqslant 2$, мы имели бы $a^a\geqslant a^2>a$, что невозможно. Если же было бы $a\leqslant -2$, мы имели бы $|a^a|=\frac{1}{|a|^{|a|}}<1$, что также невозможно, так как $a^a=a$ и для $a\leqslant -2$ $|a^a|=|a|\geqslant 2$.

221 *. Пусть a и b — произвольные натуральные числа, c^2 — наибольший квадратный делитель числа a^2+b^2 и $a^2+b^2=k\cdot c^2$. Положим $x=a^2k$, $y=b^2k$. Тогда $x+y=a^2k+b^2k=(a^2+b^2)k=(kc)^2$ и $xy=(abk)^2$.

Докажем теперь, что все пары натуральных чисел, сумма и произведение которых являются квадратами, можно получить таким путем при соответствующем выборе натуральных чисел a и b.

Итак, предположим, что $x+y=z^2$, $xy=t^2$, где z и t являются натуральными числами. Пусть $d=(x, y)$ и пусть c_1 — наибольший квадратный делитель числа d; таким образом, $d=kc_1^2$, где k — натуральное число, не делящееся ни на один квадрат натурального числа >1. Имеем $x=dx_1$, $y=dy_1$, где $(x_1, y_1)=1$, так что из равенства $x+y=z^2$ следует, что $(x_1+y_1)d=z^2$, откуда $d=k\cdot c_1^2|z^2$, а так как число k не делится ни на один квадрат натурального числа >1, то $kc_1|z$; следовательно, $z=kc_1z_1$, где z_1 — натуральное число.

Отсюда $(x_1+y_1)d=x+y=z^2=k^2c_1^2z_1^2=kdz_1^2$, откуда $x_1+y_1=kz_1^2$, $x_1y_1=\frac{t^2}{d^2}$, из чего ввиду $(x_1, y_1)=1$ следует, что числа x_1 и y_1 являются квадратами, $x_1=a_1^2$, $y_1=b_1^2$, следовательно, $x=dx_1=k(c_1a_1)^2$, $y=dy_1=$ $=k(c_1b_1)^2$, так что, положив $a=c_1a_1$, $b=c_1b_1$, будем иметь $x=ka^2$, $y=kb^2$, причем $a^2+b^2=(c_1a_1)^2+(c_1b_1)^2=c_1^2(x_1+y_1)=k(c_1z_1)^2$; положив $c_1z_1=c$, будем иметь $a^2+b^2=kc^2$, причем поскольку число k не делится ни на один квадрат натурального числа >1, то число c^2 является наибольшим квадратным делителем числа a^2+b^2. Всеми парами натуральных чисел $\leqslant 100$, сумма и произведение которых — квадраты, являются: 2, 2; 5, 20; 8, 8; 10, 90; 18, 18; 20, 80; 9, 16; 32, 32; 50, 50; 72, 72; 2, 98; 36, 64.

222. Членами последовательности Фибоначчи $\leqslant 10^4$ (определенной условиями $u_1=u_2=1$ и $u_{n+2}=u_n+u_{n+1}$ для $n=1, 2, \ldots$) являются по порядку: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181 и 6765. Среди них квадратами являются только числа $u_1=u_2=1^2$ и $u_{12}=12^2$, кубами же являются только числа $u_1=u_2=1^3$ и $u_6=2^3$ [14].

Примечание. Из таблицы последовательных чисел Фибоначчи и их разложений на простые сомножители, которую опубликовал Ярден в своей работе: Recurring sequences, Riveon Lematematica, Jerusalem, 1958, следует, что не существует чисел Фибоначчи >144 и $\leqslant 10^{13}$, являющихся степенями натуральных чисел с показателями >1. Мы не знаем, существуют ли такие числа >144.

223 *. Докажем индукцией по номеру n, что теорема Хогатта справедлива для каждого натурального числа $\leqslant u_n$. Она верна для $n=1$, так как $u_1=1$, и для $n=2$, так как $u_2=1$, а также для $n=3$, так как $u_3=2$. Пусть теперь n — натуральное число >2 и пусть каждое натуральное число $\leqslant u_n$ представлено в виде суммы различных членов последовательности Фибоначчи. Пусть k — такое натуральное число, что $u_n<k\leqslant u_{n+1}$. Если бы было $k-u_n>u_{n+1}$, мы имели бы $u_{n+1}\geqslant k>u_{n-1}+$ $+u_n=u_{n+1}$, что невозможно. Следовательно, $0<k-u_n\leqslant u_{n-1}$.

Таким образом, натуральное число $k-u_n$ оказывается суммой различных чисел последовательности Фибоначчи, причем среди них нет числа u_n, так как $k-u_n\leqslant u_{n-1}<u_n$. Отсюда следует, что $k=(k-u_n)+u_n$ есть сумма различных чисел Фибоначчи. Итак, мы показали, что каждое натуральное число $\leqslant u_{n+1}$ можно представить в виде суммы различных чисел последовательности Фибоначчи.

Таким образом, теорема Хогатта доказана индукцией по n.

Например, $1=u_1$, $2=u_3$, $3=u_4=u_1+u_3$, $4=u_1+u_4$, $5=u_5=u_3+u_4$, $6=u_1+u_5$, $7=u_3+u_5$, $8=u_6=u_4+u_5$, $9=u_1+u_6$, $10=u_3+u_6$.

224. Доказательство проведем индукцией по номеру n. Наша формула справедлива для $n=2$, так как $1^2=1\cdot 2+(-1)$. Предположим, что она справедлива для некоторого натурального числа $n\geqslant 2$. Тогда

$$u_n^2=u_{n-1}\cdot u_{n+1}+(-1)^{n-1}.$$

Отсюда

$$u_{n+1}^2 - u_n \cdot u_{n+2} = u_{n+1}^2 - u_n \cdot (u_n + u_{n+1}) =$$
$$= u_{n+1} \cdot (u_{n+1} - u_n) - u_n^2 = u_{n+1} \cdot u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n,$$

что доказывает справедливость нашей формулы для числа $n+1$.

225. Прежде всего заметим, что из тождества

$$6t = (t+1)^3 + (t-1)^3 + (-t)^3 + (-t)^3$$

следует, что каждое целое число, делящееся на 6, является суммой четырех кубов целых чисел.

Так как при каждом целом k и произвольном натуральном n для $r=0, 1, 2, 3, 4, 5$ каждое из чисел $6k+r-(6n+r)^3$ делится на 6 (так как $6 | r^3-r$ для целых r), то отсюда следует, что каждое целое число может быть представлено в виде суммы пяти кубов целых чисел бесконечным числом способов.

Ср.: W. Sierpiński. O rozkladach na sumę pieciu szescianow, Wiadomosci Matematyczne, III, 1959, 121—122.

Примечание. Высказано предположение (проверенное для всех натуральных чисел <1000), что каждое целое число может быть представлено в виде суммы четырех кубов целых чисел бесконечным числом способов. См.: A. Schincel, W. Sierpiński. Acta Arithmetica, 4, 1958, стр. 20—30; A. Mąkowski, там же, 5, 1959, стр. 121—123.

226. Это вытекает непосредственно из тождества

$$3 = (4+24n^3)^3 + (4-24n^3)^3 + (-24n^2)^3 + (-5)^3$$

для $n=1, 2, 3, \ldots$.

227. Доказательство вытекает непосредственно из следующих двух тождеств для натуральных $t>8$:

$$(t-8)^2 + (t-1)^2 + (t+1)^2 + (t+8)^2 = (t-7)^2 + (t-4)^2 + (t+4)^2 + (t+7)^2$$

и

$$(t-8)^3 + (t-1)^3 + (t+1)^3 + (t+8)^3 = (t-7)^3 + (t-4)^3 + (t+4)^3 + (t+7)^3.$$

228. Предположим, что при некотором натуральном m имеем $4^m \cdot 7 = a^2+b^2+c^2+d^2$, где по крайней мере одно из чисел a, b, c, d, например a, $\geqslant 0$ и $<2^{m-1}$. Здесь не может быть $a=0$, так как тогда число $4^m \cdot 7$ было бы суммой трех квадратов целых чисел, что, как известно, невозможно. (См., например: W. Sierpiński. Teoria liczb, wyd. 3. Warszawa — Wrocław, 1950, стр. 90, теорема 14). Таким образом, $m>1$ и $a=2^k(2t-1)$, где k — целое неотрицательное число $\leqslant m-2$ и t — натуральное число. Отсюда

$$4^m \cdot 7 - [2^k(2t-1)]^2 = 4^k[4^{m-k} \cdot 7 - (8u+1)] = 4^k(8v+7),$$

где u и v являются целыми числами (так как $k \leqslant m-2$, откуда $m-k \geqslant 2$), и, следовательно,

$$4^k(8v+7) = b^2+c^2+d^2,$$

что, как известно, невозможно (см. там же, теорема 14).

Примечание. Легко доказать, что число $4^m \cdot 7$ (где m — натуральное число) дает по крайней мере одно разложение на сумму четырех квадратов натуральных чисел, так как

$$4^m \cdot 7 = (2^m)^2+(2^m)^2+(2^m)^2+(2^{m+1})^2$$

229. Шестью наименьшими натуральными числами >2, представимыми в виде суммы двух кубов натуральных чисел, являются, как легко заметить, числа $1^3+2^3=9$, $2^3+2^3=16$, $1^3+3^3=28$, $2^3+3^3=35$, $3^3+3^3=54$, $1^3+4^3=65$. Ни одно из чисел 9, 16, 28, 35, 54 не является, как легко убедиться, суммой двух квадратов натуральных чисел, зато $65=1^2+8^2$.

Следовательно, наименьшее натуральное число >2, являющееся одновременно суммой двух квадратов натуральных чисел и суммой двух кубов натуральных чисел, есть число 65.

Чтобы доказать, что существует бесконечно много натуральных чисел, являющихся суммами двух квадратов и вместе с тем суммами двух кубов взаимно простых натуральных чисел, достаточно заметить, что при натуральном k имеем:

$$1+2^{6k} = 1^2+(2^{3k})^2 = 1^3+(2^{2k})^3.$$

230. Таково, например, число $1+2^{s!}$, так как $k|s!$ для $k=1, 2, \ldots, s$. Очевидно, вместо числа $s!$ здесь можно взять наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \ldots, s$.

231 *. Таковы, например, все числа $6 \cdot 8^n$ (где $n=0, 1, 2, \ldots$). В самом деле, ни одно такое число не есть сумма двух кубов целых чисел, так как в случае n четного оно при делении на 9 дает в остатке 6, в случае же n нечетного — дает в остатке 3 [так как $8 \equiv -1 \pmod 9$], а сумма двух кубов не может давать в остатке 3 или 6 (а также 4 или 5), так как каждый куб целого числа при делении на 9 дает в остатке 0, 1 или -1, следовательно, сумма двух кубов — остатки 0, 1, -1, 2 или -2.

Однако, как легко проверить,

$$6 = \left(\frac{17}{21}\right)^3 + \left(\frac{37}{21}\right)^3,$$

откуда

$$6 \cdot 8^n = \left(\frac{17 \cdot 2^n}{21}\right)^3 + \left(\frac{37 \cdot 2^n}{21}\right)^3.$$

Таким образом, числа $6 \cdot 8^n$ ($n=0, 1, 2, \ldots$) являются суммами двух кубов рациональных положительных чисел.

232 *. Доказательство А. Шинцеля.

Таковы все числа $7\cdot 8^n$, где $n=0, 1, 2, \ldots$. Действительно, с одной стороны, $7\cdot 8^n=(2^{n+1})^3-(2^n)^3$ для $n=0, 1, 2, \ldots$, с другой же стороны, мы докажем, что ни одно из чисел $7\cdot 8^n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ не является суммой двух кубов натуральных чисел. Легко проверить, что это так для $n=0$ и $n=1$. Предположим теперь, что существует натуральное число n, такое, что $7\cdot 8^n$ является суммой двух кубов натуральных чисел; мы можем предположить, что n означает наименьшее из таких натуральных чисел; итак, $n\geqslant 2$ и

$$7\cdot 8^n=x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2),$$

где x и y — натуральные числа. Так как здесь левая часть есть число четное, то числа x и y либо оба четные, либо оба нечетные.

Если бы они были нечетными, то нечетным было бы и число x^2-xy+y^2, а так как левая часть имеет только два нечетных натуральных делителя: 1 и 7, то мы имели бы либо $x^2-xy+y^2=1$, либо $x^2-xy+y^2=7$. В первом случае было бы $x^3+y^3=x+y$ и, значит, так как x и y — натуральные числа, было бы $x=y=1$, следовательно, $7\cdot 8^n=2$, что невозможно. Если же $x^2-xy+y^2=7$, то

$$(2x-y)^2+3y^2=(2y-x)^2+3x^2=28,$$

что дает $3x^2\leqslant 28$ и $3y^2\leqslant 28$, следовательно, $x\leqslant 3$ и $y\leqslant 3$, откуда $x^3+y^3\leqslant 54$, что невозможно, так как $x^3+y^3=7\cdot 8^n\geqslant 7\cdot 8^2$.

Следовательно, x и y оба четные: $x=2x_1$, $y=2y_1$, где x_1 и y_1 — натуральные числа, и, так как $7\cdot 8^n=x^3+y^3$, имеем $7\cdot 8^{n-1}=x_1^3+y_1^3$, что противоречит определению числа n.

Таким образом, мы доказали, что числа $7\cdot 8^n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ обладают заданным свойством.

Примечание. Доказано, что существует бесконечно много натуральных чисел n, не делящихся на куб натурального числа >1, которые не являются суммами двух кубов рациональных чисел (доказательство трудное). Такими числами $\leqslant 50$ являются 3, 4, 5, 10, 11, 14, 18, 21, 23, 25, 29, 36, 38, 39, 41, 44, 45, 46, 47.

Число 22 есть сумма двух кубов рациональных чисел, но с большими знаменателями:

$$22=\left(\frac{17299}{9954}\right)^3+\left(\frac{25469}{9954}\right)^3.$$

См.: E. S. Selmer. Acta Mathematica, 85, стр. 301, и там же таблицы на стр. 354 и 357.

233*. Доказательство А. Шинцеля.

Таковы числа $(2^k-1)2^{nk}$, где $n=0, 1, 2, \ldots$. Действительно, так как $(2^k-1)2^{nk}=(2^{n+1})^k-(2^n)^k$, то остается доказать, что уравнение

$$(2^k-1)2^{nk}=u^k+v^k \qquad (1)$$

не имеет решений в натуральных числах u и v. Это справедливо для $n=0$, так как $1^k+1^k<2^k-1<2^k+1^k$.

Предположим, что существуют натуральные числа n, для которых уравнение (1) имеет решение в натуральных числах u и v, и пусть n — наименьшее из них. Если бы числа u и v были оба четные, $u=2u_1$, $v=2v_1$, то согласно (1) мы имели бы:

$$(2^k-1)\,2^{(n-1)k}=u_1^k+v_1^k$$

вопреки предположению о числе n. Следовательно, так как левая часть уравнения (1) есть число четное, то числа u и v должны быть оба нечетные.

Предположим, что k есть нечетное число >3. Тогда из формулы

$$\frac{u^k+v^k}{u+v}=u^{k-1}-u^{k-2}v+u^{k-3}v^2-\ldots+v^{k-1},$$

где в правой части мы имеем k слагаемых, которые все нечетные, следует, что левая часть есть число нечетное, а так как она является делителем числа $(2^k-1)2^{nk}$, то

$$\frac{u^k+v^k}{u+v}\leqslant 2^k-1.$$

Мы можем предположить, что $u\geqslant v$. Тогда

$$\frac{u^k+v^k}{u+v}\geqslant v^{k-1};$$

следовательно, $v^{k-1}<2^k$, откуда $v<2^{\frac{k}{k-1}}<3$ (так как $k>3$), а так как v — нечетное, то $v=1$.

Отсюда

$$\frac{u^k+v^k}{u+v}=\frac{u^k+1}{u+1}>u^{k-2}(u-1)>(u-1)^{k-1}.$$

Таким образом, $(u-1)^{k-1}<2^k$, что дает $u-1<3$, откуда ввиду нечетности u $u=1$ или 3. Случай $u=1$ невозможен, так как приводит к равенству $u^k+v^k=2$, которое противоречит уравнению (1). Случай $u=3$ также невозможен, так как дает:

$$\frac{u^k+v^k}{u+v}=\frac{3^k+1}{4},$$

что больше, чем 2^k-1 (для $k>3$).

Предположим теперь, что k есть четное натуральное число. Ввиду нечетности чисел u и v число u^k+v^k дает при делении на 4 остаток 2, что невозможно, так как левая часть формулы (1) делится на 4.

Теорема доказана.

Примечание (А. Роткевича). Для каждого натурального числа $n>1$ существует бесконечно много натуральных чисел, являющихся суммами двух n-х степеней натуральных чисел, но не являющихся разностями двух n-х степеней натуральных чисел.

Доказательство. Если $2|n$, то для натуральных k и l число $(2k+1)^n+(2l+1)^n$ есть сумма двух n-х степеней натуральных чисел, но, будучи числом вида $4t+2$, не есть разность двух квадратов и, значит, не есть разность двух n-х степеней натуральных чисел. Если же $2 \nmid n$, то числа $(2^n+1)2^{nk}=2^{(k+1)n}+(2^k)^n$, где $k=0, 1, 2, \ldots$, не являются разностями двух n-х степеней натуральных чисел. Действительно, если бы было $(2^n+1)2^{nk}=x^n-y^n$, где x и y $(x>y)$ — натуральные числа, то числа $x_1=\frac{x}{(x, y)}$ и $y_1=\frac{y}{(x,y)}$ были бы натуральными и не могли бы быть оба четными, откуда мы легко нашли бы, что $2 \nmid \frac{x_1^n-y_1^n}{x_1-y_1}$, а так как

$$(2^n+1)2^{nk}=(x,y)^n(x_1-y_1)\frac{x_1^n-y_1^n}{x_1-y_1},$$

то оказалось бы, что $\frac{x_1^n-y_1^n}{x_1-y_1} \Big| 2^n+1$, откуда $\frac{x_1^n-y_1^n}{x_1-y_1} \leqslant 2^n+1$.

Но $\frac{x_1^n-y_1^n}{x_1-y_1} > x_1^{n-1} \geqslant 3^{n-1}$ (ибо, как легко заметить, не может быть $x_1=2$, так как тогда было бы $y_1=1$ и, значит, $2^n-1 \big| 2^n+1$, что невозможно). Таким образом, было бы $3^{n-1}<2^n+1$, что невозможно для $n\geqslant 3$.

234. Известна формула

$$1^2+2^2+\ .\ .\ .\ +n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Таким образом, необходимо найти наименьшее натуральное число $n>1$, для которого $n(n+1)(2n+1)=6m^2$, где m — натуральное число. Рассмотрим здесь 6 случаев.

1. $n=6k$, где k — натуральное число. Наше уравнение примет вид $k(6k+1)(12k+1)=m^2$. Здесь сомножители левой части попарно взаимно просты и, значит, все должны быть квадратами. Если $k=1$, то $6k+1$ не является квадратом. Следующий после 1 квадрат есть 4. Если $k=4$, то $6k+1=5^2$, $12k+1=7^2$ и, таким образом, для $n=6k=24$ сумма $1^2+2^2+\ .\ .\ .\ +24^2$ является квадратом числа 70.

2. $n=6k+1$, где k — натуральное число. Имеем:

$$(6k+1)(3k+1)(2k+1)=m^2$$

и каждое из чисел $2k+1$, $3k+1$, $6k+1$ (которые попарно взаимно просты) должно быть квадратом.

Наименьшее натуральное число k, для которого число $2k+1$ является квадратом, есть $k=4$, но тогда $n=6k+1>24$.

3. $n=6k+2$, где k — целое число $\geqslant 0$. Имеем:

$$(3k+1)(2k+1)(12k+5)=m^2$$

и числа $3k+1$, $2k+1$ и $12k+5$ (как попарно взаимно простые) должны быть квадратами. Если бы было $k=0$, число $12k+5$ не было бы квадратом. Для натуральных же k находим, как и ранее, что $k\geqslant 4$, откуда $n=6k+2>24$.

4. $n=6k+3$, где k — целое число $\geqslant 0$. Имеем:

$$(2k+1)(3k+2)(12k+7)=m^2,$$

причем, как легко заметить, числа $2k+1$, $3k+2$ и $12k+7$ являются попарно взаимно простыми и, значит, должны быть квадратами. Так как число $3k+2$ не является квадратом при $k=0$, 1, 2 или 3, то должно быть $k\geqslant 4$, так что $n=6k+3>24$.

5. $n=6k+4$, где k — целое число $\geqslant 0$. Имеем:

$$(3k+2)(6k+5)(4k+3)=m^2,$$

где числа $3k+2$, $6k+5$ и $4k+3$ попарно взаимно просты и, следовательно, должны быть квадратами. Здесь не может быть $k=0$, 1, 2, 3, так как тогда число $3k+2$ не является квадратом. Следовательно, $k\geqslant 4$, откуда $n=6k+4>24$.

6. $n=6k+5$, где k — целое число $\geqslant 0$. Имеем:

$$(6k+5)(k+1)(12k+11)=m^2,$$

где числа $6k+5$, $k+1$ и $12k+11$ попарно взаимно просты и, следовательно, должны быть квадратами. Здесь не может быть $k=0$, 1, 2, 3, так как тогда число $6k+5$ не является квадратом. Следовательно, $k\geqslant 4$, откуда $n=6k+5>24$.

Таким образом, мы доказали, что наименьшее натуральное число $n>1$, для которого сумма $1^2+2^2+\ldots+n^2$ является квадратом, есть $n=24$.

Примечание. Трудно доказывается теорема, согласно которой 24 является единственным натуральным числом >1, для которого сумма $1^2+2^2+\ldots+n^2$ есть квадрат. Некоторые указания, относящиеся к этой теореме, приводятся в моей книге «Teoria liczb», Część II. Warszawa, 1959, стр. 133. Зато сумма $1^3+2^3+\ldots+n^3$ для каждого натурального числа n есть квадрат и можно доказать, что ни для одного натурального числа $n>1$ не является кубом натурального числа (см. там же, стр. 132, следствие 3).

235. а) Искомыми числами являются все натуральные числа, кроме следующих:

1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 19 и 23.

Легко доказать, что ни одно из этих 13 чисел не является суммой конечного числа правильных степеней (которыми являются упорядоченные по величине числа 2^2, 2^3, 3^2, $2^4=4^2$, 5^2, 3^3, 2^5, 6^2, ...).

Пусть теперь n — натуральное число, отличное от каждого из упомянутых выше 13 чисел.

Если $n=4k$, где k — натуральное число, то число n есть сумма k чисел, равных 2^2.

Если $n=4k+1$, то, так как $n\neq 1$ и $n\neq 5$, мы можем предположить, что $k\geqslant 2$, так что $n=4k+1=3^2+4(k-2)$, где $k-2$ есть целое число $\geqslant 0$. Если $k=2$, то $n=3^2$, если же $k>2$, то $n=3^2+2^2+\ldots+2^2$, где слагаемых 2^2 мы имеем $k-2$.

Если $n=4k+2$, то, так как n отлично от чисел 6, 10 и 14, имеем $k\geqslant 4$ и $n=4k+2=3^2+3^2+4(k-4)$, откуда снова вытекает, что число n имеет заданное свойство.

Наконец, если $n=4k+3$, то, так как $n\neq 3$, 7, 11, 15, 19 и 23, имеем $k\geqslant 6$ и $n=3^3+4(k-6)$, откуда снова вытекает, что число n обладает заданным свойством.

б) Имеем: $1=3^2-2^3$, $2=3^3-5^2$, $3=2^7-5^3$, $4=5^3-11^2=2^3-2^2$, $7=2^7-11^2$, $8=2^4-2^3$, $9=5^2-4^2$, $10=13^3-3^7$.

Примечание. Мы не знаем, является ли число 6 разностью двух правильных степеней.

Высказано предположение, что каждое натуральное число дает конечное $\geqslant 0$ число представлений в виде разности двух правильных степеней.

236. Если $a^2+b^2=c^2$, где a, b и c — натуральные числа, то, как легко проверить, умножив обе части этого равенства на число

$$a^{2(4n^2-1)}\cdot b^{4n(2n+1)(n-1)}\cdot c^{4n^2(2n-1)},$$

мы получим:

$$[(a^{2n}b^{(2n+1)(n-1)}c^{n(2n-1)})^{2n}]^2+[(a^{2n+1}b^{2n^2-1}c^{2n^2})^{2n-1}]^2=$$
$$=[(a^{2n-1}b^{2n(n-1)}c^{2n^2-2n+1})^{2n+1}]^2.$$

Ср. W. Sierpiński. Wiadomości Matematyczne, IV, 1961, стр. 185.

237. Существует лишь одно такое натуральное число: $n=5$. Легко проверить, что это число удовлетворяет уравнению $(n-1)!+1=n^2$, а также, что числа $n=2$, 3 и 4 не удовлетворяют этому уравнению. Для $n=6$ имеем $n^2>6n-4$ и при помощи математической индукции легко можно доказать, что это неравенство справедливо для каждого натурального числа $n\geqslant 6$. Если n — натуральное число $\geqslant 6$, то имеем:

$$(n-1)!+1>2(n-1)(n-2)=2(n^2-3n+2)>n^2,$$

так как $n^2>6n-4$. Таким образом, для натуральных $n>5$ равенство $(n-1)!+1=n^2$ невозможно.

Примечание. Мы знаем только два натуральных числа >5, таких, что $n^2\mid(n-1)!+1$, а именно, 13 и 563, и не знаем, существуют ли другие такие числа и является ли число их конечным. Известно, что каждое такое число должно быть простым.

9 Заказ 1795

Заметим здесь еще, что для $n=5$, 6 и 8 числа $(n-1)!+1$ являются квадратами (соответственно чисел 5, 11 и 71), причем неизвестно, существуют ли еще другие такие натуральные числа n.

238. Если бы при натуральном $n>1$ было $t_{n-1}\cdot t_n=m^2$, где m — натуральное число, мы имели бы $(n^2-1)n^2=(2m)^2$, а так как числа n^2-1 и n^2 являются взаимно простыми, то каждое из них должно было бы быть квадратом, что невозможно, ввиду того, что разность двух квадратов натуральных чисел не может быть единицей.

Пусть теперь n — данное натуральное число. Уравнение $x^2-n(n+1)y^2=1$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах x, y. Действительно, одним из таких решений является $x=2n+1$, $y=2$, если же при некоторых натуральных x и y имеем $x^2-n(n+1)y^2=1$, то также

$$[(2n+1)x+2n(n+1)y]^2-n(n+1)[2x+(2n+1)y]^2=1.$$

Наконец, если x и y являются такими натуральными числами, что $x^2-n(n+1)y^2=1$, то $t_n\cdot t_{2t_ny^2}=t_n\cdot t_n\cdot y^2(2t_n\cdot y^2+1)=t_n^2\cdot y^2\cdot x^2=(t_n\cdot yx)^2$.

Так например, для $n=2$ имеем $t_2\cdot t_{24}=30^2$, $t_2t_{2400}=(3\cdot 20\cdot 49)^2$.

239. $2^{10}=1024>10^3$. Отсюда $2^{1945}=2^5\cdot(2^{10})^{194}>10\cdot 10^{3\cdot 194}=10^{583}$, откуда $2^{2^{1945}}>2^{10^{583}}=(2^{10})^{10^{582}}>10^{3\cdot 10^{582}}$, число же цифр последнего числа больше, чем 10^{582}.

Число $5\cdot 2^{1947}+1$ имеет, очевидно, цифр столько же, сколько их имеет число $5\cdot 2^{1947}=10\cdot 2^{1946}$, а так как $\log_{10}2=0{,}30103...$, то $2^{1946}=10^{1946\log_{10}2}=10^{585{,}8...}$, откуда следует, что наше число $5\cdot 2^{1947}+1$ имеет 587 цифр.

Примечание. Число F_{1945} есть наибольшее из известных составных чисел Ферма.

240. Число $2^{11213}-1$ имеет, очевидно, столько цифр (в десятичной системе счисления), сколько цифр имеет число 2^{11213}, от которого оно отличается только последней цифрой. Таким образом, достаточно подсчитать, сколько цифр имеет число 2^{11213}.

Если n есть натуральное число вида 10^x, где x — вещественное число ($\geqslant 0$), то, обозначив через $[x]$ наибольшее целое число $\leqslant x$, имеем $10^{[x]}\leqslant n<10^{[x]+1}$, откуда следует, что число n имеет $[x]+1$ цифр. Но $2^{11213}=10^{11213\log_{10}2}$, а так как $\log_{10}2=0{,}30103...$, то $3375<11213\log_{10}2<376$ и, следовательно, число $2^{11213}-1$ имеет (в десятичной системе счисления) 3376 цифр.

241. Имеем:

$$2^{11212}(2^{11213}-1)=2^{22425}-2^{11212}.$$

Подсчитаем вначале, сколько цифр имеет число 2^{22425}. Так как $22425\log_{10}2=22425\cdot 0{,}30103\ldots=6750{,}597\ldots$, то (см. решение за-

дачи 240) число 2^{22425} имеет 6751 цифру и $2^{22425}=10^{6750}\cdot 10^{0,597\ldots}$, а так как $10^{0,597\ldots}>10^{\frac{1}{2}}>3$, то $10^{6751}>2^{22425}>3\cdot 10^{6750}$, откуда следует, что первая цифра числа 2^{22425} должна быть $\geqslant 3$. Поэтому число цифр числа 2^{22425} останется без изменения, если из последнего мы вычтем число 2^{11212} с меньшим числом цифр. Итак, число $2^{11212}(2^{11213}-1)$ имеет 6751 цифру.

242. Имеем: $3!=6$, $3!!=6!=720$, $3!!!=720!>99!\cdot 100^{621}>10^{1242}$. Таким образом, число 3!!! имеет более тысячи цифр.

На основании известной теоремы (см., например: W. Sierpiński. Teoria liczb, wyd. 3. Warszawa — Wrocław, 1950, стр. 163, лемма III) [1], если m — натуральное число, а p — простое число, то наибольшая степень числа p, делящая число $m!$ есть

$$\left[\frac{m}{p}\right]+\left[\frac{m}{p^2}\right]+\left[\frac{m}{p^3}\right]+\ \ldots\ ,$$

где $[x]$ — наибольшее целое число $\leqslant x$. Отсюда следует, что наибольшая степень числа 5, делящая число $3!!!=720!$, есть

$$\left[\frac{720}{5}\right]+\left[\frac{720}{25}\right]+\left[\frac{720}{125}\right]+\left[\frac{720}{625}\right]=144+28+5+1=178,$$

а наивысшая степень числа 2, делящая число 720!, будет еще больше, так как уже $\left[\frac{720}{2}\right]=360$. Отсюда следует, что число $3!!!=720!$ имеет на конце 178 нулей.

243*. Решение, найденное А. Шинцелем.

Указанное свойство имеет место для натуральных чисел m, являющихся степенями простых чисел (с натуральными показателями) и только для таких чисел m.

В самом деле, если $m=p^k$, где p есть простое число, k — натуральное, то для $f(x)=x^{\varphi(p^k)}$ в случае $p\nmid x$ согласно теореме Эйлера имеем $f(x)\equiv 1 \pmod{p^k}$, в случае же $p\mid x$ имеем $p^k\mid x^k$, а так как $\varphi(p^k)\geqslant p^{k-1}\geqslant$ $\geqslant k$ (что легко доказываем для натуральных k посредством индукции), то и подавно $p^k\mid x^{\varphi(p^k)}$, следовательно $f(x)\equiv 0 \pmod{p^k}$.

Если m — натуральное число >1 и m не является степенью простого числа, то m имеет по крайней мере два различных простых делителя: p и $q\neq p$. Предположим, что $f(x)$ есть многочлен с целыми коэффициентами и что существуют целые числа x_1 и x_2, такие, что $f(x_1)\equiv 0 \pmod m$ и $f(x_2)\equiv 1 \pmod m$. Тогда, так как $p\mid m$ и $q\mid m$, $f(x_1)\equiv 0 \pmod p$ и $f(x_2)\equiv 1 \pmod q$. Но p и q — различные простые числа, поэтому на основании китайской теоремы об остатках существует целое число x_0, такое, что $x_0\equiv x_1 \pmod p$ и $x_0\equiv x_2 \pmod q$ и, следовательно, $f(x_0)\equiv f(x_1)\equiv$ $\equiv 0 \pmod p$ и $f(x_0)\equiv f(x_2)\equiv 1 \pmod q$.

[1] Доказательство этой теоремы см. ниже, на стр. 147. — *Прим. перев.*

На основании первого из этих сравнений убеждаемся, что не может быть $f(x_0) \equiv 1 \pmod{m}$, а на основании второго — что не может быть $f(x_0) \equiv 0 \pmod{m}$.

Таким образом, $f(x_0)$ при делении на m не дает в остатке ни 0, ни 1. Следовательно, если m не является степенью простого числа, то ни один многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами не удовлетворяет поставленным требованиям.

244. Как легко подсчитать,

$$D < [(4m^2+1)n+m+1]^2,$$

следовательно, целая часть числа $\sqrt{D}$ есть число $a_0 = (4m^2+1)n+m$, откуда

$$D - a_0^2 = 4mn+1.$$

Таким образом, $\sqrt{D} = a_0 + \frac{1}{x_1}$ и $x_1 = \frac{1}{\sqrt{D} - a_0} = \frac{\sqrt{D} + a_0}{D - a_0^2}$.

Так как a_0 есть целая часть числа $\sqrt{D}$, то имеем $a_0 < \sqrt{D} < a_0 + 1$, откуда

$$2a_0 < \sqrt{D} + a_0 < 2a_0 + 1,$$

учитывая же, что $a_0 = 4(mn+1)m+n$, найдем:

$$2m + \frac{2n}{4mn+1} < \frac{\sqrt{D}+a_0}{D-a_0^2} < 2m + \frac{2n+1}{4mn+1},$$

откуда, так как $\frac{2n+1}{4mn+1} < 1$, следует, что целая часть числа $x_1 = \frac{\sqrt{D}+a_0}{D-a_0^2}$ есть число $a_1 = 2m$. Таким образом, $x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}$ и $x_2 = \frac{1}{x_1 - a_1}$.

Но $x_1 - a_1 = \frac{\sqrt{D}+a_0}{4mn+1} - 2m = \frac{\sqrt{D} - [(4mn+1)m-n]}{4mn+1}$,

следовательно,

$$x_2 = \frac{(4mn+1)[\sqrt{D} + (4mn+1)m - n]}{D - [(4mn+1)m-n]^2}.$$

Но, как легко проверить:

$$D = [(4mn+1)m-n]^2 + (4mn+1)^2;$$

следовательно,

$$x_2 = \frac{\sqrt{D} + (4mn+1)m - n}{4mn+1},$$

а так как $a_0<\sqrt{D}<a_0+1$, или $(4mn+1)m+n<\sqrt{D}<(4mn+1)m+n+1$, то $2m<x_2<2m+\frac{1}{4mn+1}$ и, значит, целая часть числа x_2 есть число $a_2=2m$. Таким образом, $x_2=a_2+\frac{1}{x_3}$, откуда $x_3=\frac{1}{x_2-a_2}$.

Но

$$x_2-a_2=\frac{\sqrt{D}+4(mn+1)m-n}{4mn+1}-2m=\frac{\sqrt{D}-(4mn+1)m-n}{4mn+1},$$

следовательно,

$$x_3=\frac{(4mn+1)[\sqrt{D}+(4mn+1)m+n]}{D-[(4mn+1)m+n]^2}=\sqrt{D}+(4mn+1)m+n=$$

$$=\sqrt{D}+a_0,$$

откуда заключаем, что целая часть числа x_3 есть $2a_0$ и что число $\sqrt{D}$ разлагается в арифметическую цепную дробь с трехчленным периодом, состоящим из чисел $2m$, $2m$ и $2a_0$.

Примечание. Можно доказать, что всеми натуральными числами D, для которых разложение числа $\sqrt{D}$ в арифметическую цепную дробь имеет трехчленный период, являются числа D, которые были здесь рассмотрены: См.: W. Sierpiński. Wiadomości Matematyczne, V, 1962, стр. 53—55.

245. Если известно разложение числа n на простые сомножители $n=q_1^{\alpha_1}\cdot q_2^{\alpha_2}\ldots q_s^{\alpha_s}$, то для $\varphi(n)$ и $d(n)$ имеем формулы

$$\varphi(n)=q_1^{\alpha_1-1}(q_1-1)\ldots q_s^{\alpha_s-1}(q_s-1),$$

$$d(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_s+1).$$

Подсчитав при помощи этих формул значения функций $\varphi(n)$ и $d(n)$ для $n\leqslant 30$, мы легко найдем, что значениями $n\leqslant 30$, для которых $\varphi(n)=d(n)$, являются $n=1, 3, 8, 10, 18, 24$ и 30. Здесь мы имеем: $\varphi(1)=d(1)=1$, $\varphi(3)=d(3)=2$, $\varphi(8)=d(8)=4$, $\varphi(10)=d(10)=4$, $\varphi(18)=d(18)=6$, $\varphi(24)=d(24)=8$, $\varphi(30)=d(30)=8$.

Примечание. Доказано, что не существует других решений уравнения $\varphi(n)=d(n)$ в натуральных числах n. Именно, можно доказать, что для $n>30$ имеем $\varphi(n)>d(n)$. См.: Г. Пойа и Г. Сегё. Задачи и теоремы из анализа, ч. II, изд. 2. М., 1956, стр. 355, задача 45.

246. Как легко проверить, при натуральном k и целом $s\geqslant 0$ имеем:

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k+1}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{k+s}\right)=1+\frac{s+1}{k}. \qquad (1)$$

Положительное рациональное число $w-1$ мы можем, очевидно, представить в виде $w-1=\frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа (не обяза-

тельно взаимно простые) и где $n > g$. Теперь, чтобы правая часть формулы (1) была равна w, достаточно принять $k=n$ и $s=m-1$. Таким путем мы получим для w заданное разложение.

Ср.: Matematyka, 1958, № 1(51), стр. 60, задача 457.

247*. Докажем вначале, что каждое целое число $k \geqslant 0$ можно по крайней мере одним способом представить в виде

$$k = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \ldots \pm m^2, \qquad (1)$$

где m — натуральное число, знаки же «$\pm$» выбраны надлежащим образом. Это справедливо для 0, так как $0=1^2+2^2-3^2+4^2-5^2-6^2+7^2$. Это также имеет место для чисел 1, 2, 3, так как $1=1^2$, $2=-1^2-2^2-3^2+4^2$, $3=-1^2+2^2$, $4=-1^2-2^2+3^2$.

Далее, очевидно, достаточно доказать, что наша теорема справедлива для каждого натурального числа k, а так как она справедлива для чисел 0, 1, 2 и 3, то достаточно доказать, что если теорема справедлива для целого числа $k \geqslant 0$, то она справедлива также для числа $k+4$.

Итак, предположим, что теорема справедлива для числа k, т. е. что существует такое натуральное число m, что при надлежащем выборе знаков «$\pm$» имеет место формула (1). Как легко проверить,

$$(m+1)^2-(m+2)^2-(m+3)^2+(m+4)^2=4. \qquad (2)$$

Поэтому из формулы (1) следует, что

$$k+4 = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \ldots \pm m^2 + (m+1)^2 - (m+2)^2 - (m+3)^2 + (m+4)^2,$$

т. е. что наша теорема справедлива для числа $k+4$. Таким образом, она справедлива для каждого целого числа.

Заметив теперь, что из тождества (2) для каждого натурального числа m вытекает соотношение

$$(m+1)^2-(m+2)^2-(m+3)^2+(m+4)^2-(m+5)^2+(m+6)^2+ \\ +(m+7)^2-(m+8)^2=0,$$

мы можем в формуле (1) число m заменить на $m+8$, а следовательно, также на $m+16$ и т. д. Следовательно, каждое целое число k можно бесконечным числом способов представить в виде (1), ч. и т. д.

248. а) Уравнение $4x+2=0$, очевидно, не имеет целых корней. Однако сравнение $4x+2 \equiv 0 \pmod{p}$ разрешимо для каждого простого модуля p. Для модуля 2 оно разрешимо тождественно, если же p — простое нечетное число, $p=2k+1$, где k — натуральное число, то наше сравнение имеет решение $x=k$.

б) Примем $m=a$; поскольку сравнение $ax+b \equiv 0 \pmod{m}$ разрешимо, то $a|b$, следовательно, $b=ak$, где k — целое число, и уравнение $ax+b=0$ имеет корень $x=-k$.

249. Имеем тождество $6x^2+5x+1=(3x+1)(2x+1)$, из которого следует, что уравнение $6x^2+5x+1=0$ не имеет решений в целых числах. Пусть m означает произвольное натуральное число, $m=2^\alpha m_1$, где α — целое число $\geqslant 0$, а m_1 — нечетное натуральное число. Так как $(2^\alpha, m_1)=1$, то, как известно, существует натуральное число x, такое, что $3x\equiv -1 \pmod{2^\alpha}$, а $2x\equiv -1 \pmod{m_1}$, откуда $m=2^\alpha m_1 | (3x+1)(2x+1)$; следовательно, $6x^2+5x+1\equiv 0 \pmod{m}$.

250. а) Если q — простое число $\neq 3$ и $q|2^p+1$, то $q|2^{2p}-1$ и $2^{2p}\equiv 1 \pmod{q}$. Пусть δ — показатель, которому принадлежит число 2 по модулю q. Так как $\delta|2p$, то $\delta=1, 2, p$ или $2p$. Но $\delta=1$ дает $2\equiv 1 \pmod{q}$, что невозможно; $\delta=2$ дает $2^2\equiv 1 \pmod{q}$, откуда $q=3$ вопреки условию; $\delta=p$ дает $q|2^p-1$, а так как $q|2^p+1$, то получаем $q|2$, что невозможно, ибо $q|2^p+1$ и q нечетно. Итак, $\delta=2p$, а так как $\delta|q-1$, то $2p|q-1$, откуда $q=2kp+1$, где k — натуральное число.

Интересно сопоставить доказанную теорему Ферма с хорошо известной теоремой, согласно которой если p — простое число >2, то каждый делитель числа 2^p-1 имеет форму $2kp+1$, где k — целое число.

б) Доказательство вытекает из равенства

$$t_{n^2} + t_{n^2+1}=(n^2-1)^2+(2n)^2 \text{ для } n=2, 3, \ldots$$

в) Таковы, например, числа $t_{8k}+t_2=4k(8k+1)+3$ для $k=1, 2, \ldots$, так как эти числа при делении на 4 дают в остатке 3 и поэтому не могут быть суммами двух квадратов.

г) Таковы, например, все числа вида $(9t+7)^2+1^2$, где $t=0, 1, 2, \ldots$, так как все эти числа суть числа вида $9k+5$, где k — натуральное число. Действительно, если бы было $9k+5=t_x+t_y$, было бы $8(9k+5)+2=(2x+1)^2+(2y+1)^2$, где x и y — натуральные числа. Но квадрат нечетного числа при делении на 9 дает в остатке 0, 1, 4 или 7; поэтому сумма двух квадратов нечетных чисел при делении на 9 не может давать в остатке 6 — вопреки тому, что $8(9k+5)+2=9(8k+4)+6$.

д) Таковы, например, все числа вида $36k+15$, где $k=0, 1, \ldots$, ибо при делении на 9 они дают остаток 6, а при делении на 4 — остаток 3.

е) Решение А. Шинцеля. В 1942 г. Люнггрен доказал, что уравнение $z^2+1=2y^4$ имеет только два решения в натуральных числах y и z: $y=z=1$ и $y=13$, $z=239$. Из этого уравнения следует, что z есть нечетное число, $z=2x+1$, что дает уравнение $x^2+(x+1)^2=y^4$, имеющее в натуральных числах x и y только одно решение: $x=119$, $y=13$ [15].

ПРИМЕЧАНИЯ ПЕРЕВОДЧИКА

1 (стр. 21). Математики древности знали и умели доказывать теорему о бесконечности ряда простых чисел, т. е. теорему о существовании бесконечного множества простых чисел в арифметической прогрессии $2x+1$ ($x=1, 2, \ldots$). Хорошо известное евклидовское рассуждение («Начала», кн. IX, предл. 20) впоследствии было применено для доказательства аналогичных теорем о простых числах в арифметических прогрессиях частных видов: $4x-1$, $6x-1$ и др.

Открытие общей теоремы о бесконечности числа простых чисел в арифметической прогрессии $ax+b$, где $(a, b)=1$, $x=1, 2, \ldots$, — заслуга Лежандра[1]. Заметка Лежандра, содержащая эту теорему, появилась в 1778 г. (в журнале за 1775 г.). Доказательство теоремы Лежандр поместил во втором издании своих «Essai sur la theorie des nombres» (Париж, 1808). Но это доказательство оказалось ошибочным.

Первое доказательство теоремы Лежандра было найдено Дирихле и опубликовано им в 1837 г. Работа Дирихле, посвященная этой теореме, сыграла важную роль в развитии аналитической теории чисел, начало которой было положено Эйлером. Теорема, открытая Лежандром, не случайно стала носить имя Дирихле. О роли этой теоремы и методов ее доказательства в теории чисел читатель может получить представление из книги Г. Хассе «Лекции по теории чисел» (Москва, 1953), одна из четырех глав которой носит название «Теорема Дирихле о простых числах».

Теорема Дирихле — одна из важнейших теорем теории чисел. Сам Дирихле распространил ее на целые комплексные числа, а Н. Г. Чеботарев дал ее обобщение в теории идеалов. В последние два десятилетия было потрачено немало усилий для получения сравнительно элементарных доказательств теоремы Дирихле. Успехи, достигнутые в этом направлении, связаны с именами А. Сельберга, Г. Шапиро и др.

Согласно теореме Дирихле целочисленный многочлен первой степени $ax+b$, где $(a, b)=1$ и x принимает все целые значения, дает бесконечное множество простых чисел. Обладают ли этим свойством целочисленные многочлены (или многочлены с рациональными коэффициентами) второй и более высоких степеней? Хотя этот вопрос давно уже привлекает внимание математиков, его до сих пор не удалось решить.

Понятно, что в этой задаче целочисленный многочлен $f(x)$ должен быть: 1) примитивным (т. е. иметь взаимно-простые коэффициенты), 2) неприводимым над полем рациональных чисел (т. е. не быть произведением двух многочленов с рациональными коэффициентами, степени которых меньше степени $f(x)$). Однако легко показать, что

---

[1] Г. Вилейтнер в своей книге «История математики от Декарта до середины XIX столетия» (М., 1960, стр. 81) открытие этой теоремы приписывает Эйлеру. Однако у Эйлера (Opusc. analytica, 2, 1785, стр. 241; мемуар за 1775 г.) мы обнаруживаем лишь утверждение о бесконечности числа простых чисел в арифметических прогрессиях $4x+1$, $4x-1$, $100x+1$ и подобных им, которое естественно было бы обобщить на прогрессии видов: $mx+1$ и $mx-1$, что, по-видимому, Эйлер и имел в виду.

многочлен степени выше первой, удовлетворяющий этим требованиям, может и не давать простых чисел. Так, например, примитивный и неприводимый многочлен

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 8x + 18 = 6\left[\frac{x(x+1)(x+2)}{1\cdot 2\cdot 3} + x + 3\right] \qquad (1)$$

дает только числа, кратные 6.

В 1857 г. В. Я. Буняковский сформулировал следующую гипотезу: если $f(x)$ — целочисленный, примитивный и неприводимый над полем рациональных чисел многочлен, а N — наибольший общий делитель значений его при всех целых значениях x, то целозначный многочлен $f(x)/N$ дает бесконечное множество простых чисел, когда x принимает все целые значения.

Для многочлена (1) N, очевидно, $\geqslant 6$. Но так как $f(0)=18$, а $f(1)=30$, то ясно, что N не превосходит 6. Следовательно, $N=6$. Таким образом, по Буняковскому целозначный многочлен $\frac{f(x)}{6} = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x + 3$ дает бесконечно много простых чисел, когда x принимает все целые значения.

Кроме теоремы Дирихле, мы не знаем ни одного факта, подтверждающего правильность гипотезы Буняковского. До сих пор не решен вопрос, интересовавший Эйлера: дает ли многочлен x^2+1 конечное или бесконечное множество простых чисел, когда x принимает все натуральные значения. Гипотеза Буняковского и ряд других гипотез и теорем теории чисел являются следствиями одной общей гипотезы, высказанной недавно А. Шинцелем (см.: В. Серпинский, Что мы знаем и чего не знаем о простых числах. М., Физматгиз, 1963, стр. 86).

Математиков давно интересовал вопрос о наименьшем простом числе в арифметической прогрессии. Интересный и глубокий результат в этом направлении был получен в 1944 г. Ю. В. Линником. Линник установил существование абсолютной постоянной C, такой, что если $(a, b)=1$ и $1\leqslant b<a$, то в арифметической прогрессии b, $a+b$, $2a+b$, . . . содержится простое число, меньшее чем a^C. В 1965 г. Чень Цзынь-рун показал, что постоянная Линника C не превосходит 777.

2 (стр. 23). В 1845 г. известный французский математик Жозеф Бертран сформулировал и использовал для решения одного вопроса теории групп утверждение, согласно которому при всяком целом $n>7$ между $\frac{n}{2}$ и $n-2$ всегда содержится простое число. Этот факт он проверил при помощи имевшейся в его распоряжении таблицы простых чисел для всех $n<6\cdot 10^6$. Бертран не смог доказать свое утверждение и, таким образом, был вынужден принять его в качестве постулата.

Нетрудно видеть, что постулат Бертрана можно перефразировать следующим образом: при всяком целом $n>3$ между n и $2n-2$ содержится по крайней мере одно простое число[1]. В этой формулировке постулат Бертрана был впервые доказан П. Л. Чебышевым в его работе, опубликованной в 1850 г. под названием «Mémoire sur nombres premiers»[2]. Эта классическая работа великого математика начинается следующими словами: «Все вопросы, зависящие от закона распределения простых чисел в ряду

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, . . .,

представляют вообще большие трудности. Те заключения, которые можно сделать с очень большой вероятностью на основании таблиц простых чисел, чаще всего остаются без строгого доказательства. Например, таблицы простых чисел приводят к мысли, что,

[1] Из этого предложения вытекает, что для натуральных $n>1$ между n и $2n$ содержится простое число (см. следствие 1 на стр. 153). Последнее утверждение иногда также называют постулатом Бертрана. В такой ослабленной формулировке постулат Бертрана недавно был обнаружен Г. П. Матвиевской в одной из записных книжек Эйлера. См. ее статью в 14-м выпуске «Историко-математических исследований».

[2] П. Л. Чебышев. Полное собрание сочинений, т. I, М.—Л., 1946, стр. 191—207.

начиная от $a>3$, существует всегда простое число, большее чем a и меньшее $2a-2$, что составляет известный postulatum Бертрана, но до настоящего времени не было доказательства этого предложения для значений a, которые превышают пределы наших таблиц. Трудность еще увеличивается, когда задаются более тесными пределами . . . ».

Найденное Чебышевым доказательство постулата Бертрана ценно и само по себе. Однако еще в большей мере здесь должны быть ценимы приемы, выдвинутые Чебышевым для решения труднейших вопросов, связанных с законом распределения простых чисел. Новые методы Чебышева, использующие сравнительно элементарные средства, произвели сильнейшее впечатление на математиков. Французский математик Серре, поместивший во втором томе своего курса «Высшей алгебры» мемуар Чебышева «О простых числах», писал: «Я не считаю бесполезным представить здесь гениальный анализ Чебышева, анализ, который покоится на совершенно новых соображениях», а выдающийся английский математик Сильвестр закончил мемуар 1881 г. словами: «Чтобы выразиться с определенностью о существовании подобной возможности, надо, вероятно, подождать, пока родится на свет некто, кто будет настолько превосходить Чебышева, с точки зрения общих взглядов и проникновения, насколько сам Чебышев доказал, что он выше по этим качествам обыкновенного уровня человеческого рода».

Доказательство Чебышева опирается на установленную им теорему, согласно которой для любого $\varepsilon>{}^1/_5$ существует натуральное число $n=n_0(\varepsilon)$ такое, что для каждого $n\geqslant n_0$ между n и $(1+\varepsilon)n$ (включая последнее значение) содержится по крайней мере одно простое число.

Постулату Бертрана и теореме Чебышева посвящены многочисленные исследования. В 1929 г. И. Шур показал, что граница n_0 в теореме Чебышева может быть определена, и для $\varepsilon={}^1/_4$ нашел $n_0({}^1/_4)=24$. Через три года результат Шура был улучшен Р. Бройшем, который нашел (при помощи весьма сложного аналитического аппарата), что $n_0({}^1/_8)=48$. Наилучший результат по теореме Чебышева в настоящее время принадлежит Г. Рорбаху и Ж. Вейсу, доказавшим элементарно, при помощи чебышевских функций $\Theta(x)$ и $\psi(x)$, что $n_0({}^1/_{13})=118$, и даже несколько сильнее, что $n_0(0{,}073)=119$. См.: H. Rohrbach, J. Weis. Zum finiten Fall das Bertrandschen Postulats, J. reine und angew. Math., т. 214/215. 1964, стр. 432—440. Библиография — 22 названия.

3 (стр. 29). Теорема Эйлера, согласно которой уравнение

$$4xy-x-y=z^2 \qquad (1)$$

не имеет решений в натуральных числах x, y и z, впервые упоминается в письме Эйлера к Гольдбаху от 9 сентября 1741 г. [1]. Эйлер, подтвердив здесь справедливость «очень милой» («sehr artig») теоремы Гольдбаха о том, что $(3m+2)n^2+3$ ни при каких целых m и n не может быть квадратом, замечает, что ему уже давно известны следующие аналогичные теоремы, согласно которым числа $4mn-m-1$ и числа $4mn-m-n$ ни при каких целых положительных m и n не могут быть квадратами.

Эти две теоремы и другие, сходные с ними, были предметом довольно продолжительной дискуссии между Эйлером и Гольдбахом. Эйлер видел, что невозможность равенства

$$4mn-m-1=a^2 \qquad (2)$$

или, что то же самое, равенства

$$(4n-1)m=a^2+1 \qquad (3)$$

в натуральных числах m, n и a вытекает из теоремы Ферма: ни одно простое число вида $4k-1$ не может быть делителем суммы двух взаимно простых квадратов. Эйлер нашел доказательство этой теоремы Ферма и сообщил его Гольдбаху в письме от 6 марта 1742 г. (представление об этом доказательстве можно получить из примечания [5]).

---

[1] Здесь и далее даты приводятся по новому стилю. См.: «Leonhard Euler und Christian Goldbach Briefwechsel 1729—1764», Hrsg. von A. P. Juškevič und E. Winter, Akademie—Verlag, Berlin, 1965.

Из теоремы Ферма вытекала также невозможность равенства $(4m-1)(4n-1)=(2a)^2+1$, а следовательно, и невозможность равенства $4mn-m-n=a^2$.

Однако и Эйлер, и Гольдбах считали, что обе теоремы могут быть доказаны при помощи более простых средств, и настойчиво искали другие доказательства. Наибольшую активность в этих поисках проявил Гольдбах. Хотя его рассуждения первоначально были громоздки и запутанны, а порой неубедительны и ошибочны, ему в конце концов удалось получить исключительно простое и красивое доказательство теоремы Эйлера, по которой уравнение

$$4xy-x-1=z^2 \tag{4}$$

не имеет решений в натуральных числах x, y, z. Воспроизведем здесь это доказательство, внеся в него несущественные изменения.

Пусть уравнение (4) разрешимо в натуральных числах x, y и z и пусть a — наименьшее натуральное значение z, удовлетворяющее уравнению (4), так что имеем равенство (2), где m и n — также натуральные числа. Прибавив к обеим частям равенства (2) по $-4ma+4m^2$, получим:

$$4m(n-a+m)-m-1=(a-2m)^2. \tag{5}$$

Теперь нетрудно показать, что

$$a<m. \tag{6}$$

Действительно, предположим $a=m$ нужно отбросить, так как в этом случае правая часть равенства (2) делилась бы на m, а левая нет. Если же предположить, что $a>m$, то будет $n-a+m<n$, и, значит, левая часть равенства (5) окажется меньше левой части равенства (2). Таким образом, мы придем к неравенству $(a-2m)^2<a^2$, невозможному ввиду определения числа a.

Покажем, что

$$4n-1>2a. \tag{7}$$

Прибавив к обеим частям равенства (2) по $-2a(4n-1)+(4n-1)^2$, получим $(4n-1)(m-2a+4n-1)-1=[a-(4n-1)]^2$. Поэтому, учитывая определение числа a, имеем неравенство $a^2<[a-(4n-1)]^2$, из которого непосредственно вытекает (7).

Учитывая (2), (6) и (7), получаем $a^2+1=(4n-1)m>2a\cdot a=2a^2$, откуда $a^2<1$, что невозможно. Теорема доказана.

Приведенное доказательство является поучительным примером чисто арифметического рассуждения. Эйлер с восторгом встретил его. «Должен признаться, — писал он в письме от 15 октября 1743 г., — что я не ожидал, что данную теорему можно доказать столь легким и прекрасным путем. Я уверен, что большинство теорем Ферма может быть доказано подобным же путем, и поэтому я еще более обязан Вам за сообщение этого прекрасного доказательства». В этом же письме Эйлер показал, что прием Гольдбаха применим и для доказательства теоремы об уравнении (1).

Вот доказательство Эйлера.

Пусть уравнение (1) разрешимо в натуральных числах x, y и z и пусть a — наименьшее натуральное значение z, удовлетворяющее этому уравнение, так что имеем равенство

$$4mn-m-n=a^2, \tag{8}$$

где m и n — также натуральные числа.

Умножив обе части равенства (8) на 4, мы приведем его к виду

$$(4m-1)(4n-1)-1=4a^2. \tag{9}$$

Прибавив к обеим частям равенства (9) по $-8a(4n-1)+4(4n-1)^2$, получим:

$$[4m-1-8a+4(4n-1)](4n-1)-1=4(a-4n+1)^2. \tag{10}$$

Равенство (10) сходно с равенством (9), и поэтому оно доставляет новое решение уравнения (1) с $z=2|a-4n+1|$.

Учитывая определение числа a, имеем:

$$[4m-1-8a+4(4n-1)](4n-1)>(4m-1)(4n-1),$$

откуда $4n-1>2a$.

Так как равенство (8) симметрично относительно m и n, то, поступая аналогичным образом, найдем, что $4m-1>2a$.

Положим $4m-1=2a+p$ и $4n-1=2a+q$, где p и q — натуральные числа. Тогда

$$(4m-1)(4n-1)=4a^2+2a(p+q)+pq,$$

откуда, приняв во внимание (9), получим $2a(p+q)+pq=1$, что, очевидно, невозможно в натуральных числах a, p и q. Полученное противоречие доказывает теорему.

Интерес Эйлера к уравнению (1) не был случайным. Он был тесно связан с его изысканиями о линейных делителях квадратичных форм, приведшими его к открытию важнейшей теоремы теории чисел — квадратичному закону взаимности.

4 (стр. 33). Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется периодической, если существуют такие натуральные числа k и l, что при любом $n\geqslant k$ выполняется равенство $a_{n+l}=a_n$. Если l — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее этому условию, то говорят, что последовательность $\{a_n\}$ имеет l-членный период. Ее период называется чистым, если ему принадлежат все первые l членов последовательности. Таким образом, чистый период получается только при $k=1$.

5 (стр. 39). Примерно за 500 лет до н. э. китайцам уже был известен частный случай малой теоремы Ферма: если n — нечетное простое число, то $n|2^{n-1}-1$. Тогда же китайцы ошибочно полагали, что справедлива теорема: если $n|2^{n-1}-1$, то n не может быть составным числом. Эти утверждения, по-видимому, были основаны только на эмпирической индукции. Об их китайском происхождении в Европе узнали лишь в самом конце XIX в. См.: J. H. Jeans. The converse of Fermat's theorem, Messenger Math., 27, 1898, стр. 174.

Ошибочная «теорема китайцев», разумеется, могла возникнуть и на европейской почве. И действительно, изучая рукописное наследие Лейбница, публикация которого началась во второй половине XIX в., Д. Манке заметил, что Лейбниц открыл эту «теорему китайцев» и даже нашел для нее доказательство (ошибка в этом доказательстве легко обнаруживается).

Ложность «теоремы китайцев» впервые была установлена в 1830 г., когда один неизвестный автор в заметке, напечатанной в шестом томе журнала Крелле, показал, что $2^{340}-1\equiv 0 \pmod{341}$. Дальнейшие указания, относящиеся к этому интересному вопросу, см. в статье: E. Grassini, I numeri compositi m che verificano la congruenza di Fermat $a^{m-1}\equiv 1 \pmod m$, Periodico di Matematiche, сер. IV, т. 43, 1965, № 3, стр. 183—208.

Автор этих строк придерживается мнения, что ошибочное утверждение Ферма о простоте чисел $F_n=2^{2^n}+1$, где $n=0, 1, 2, \ldots$, возникло на основе эмпирической индукции. Ферма заметил, что числа $F_n=3$, 5, 17, 257, 65537, которые получаются при $n=0$, 1, 2, 3, 4, являются простыми. Исследование дальнейших чисел F_n его затрудняло. Начиная с 1640 г. Ферма упорно искал доказательство для своей ложной теоремы и предлагал найти его своим корреспондентам. В 1659 г. Ферма в письме к Каркави уже указывал, что теорема о простоте чисел F_n может быть доказана методом бесконечного спуска.

Если исходить из убеждения, что Ферма умел доказывать свои арифметические теоремы, то интересно было бы восстановить и его ошибочное доказательство ложной теоремы, основанное на методе спуска. Однако остроумная реконструкция Банахевича не использует метод спуска. По Банахевичу, Ферма должен был пользоваться «теоремой китайцев», которую он мог принять в качестве постулата. Такое доказательство, по мне-

нию Банахевича, могло в глазах Ферма повысить правдоподобность его утверждения о числах F_n. См.: T. Banachiewicz. O związku pomiędzy pewnem twierdzeniem matematyków chińskich a forma Fermata na liczby pierwsze, Sprawozdania z posiedzeń Towar. Nauk. Warszawskiega, т. 2, № 1, 1909, стр. 7—10.

В научном наследии Ферма, дошедшем до нас, нет ни одного указания на «теорему китайцев». Более того, легко показать, что Ферма этой теоремой не стал бы пользоваться. Ферма интересовался числами вида 2^n-1, где $n=1, 2, \ldots$. В двух письмах за 1640 г. он указывал, что если n есть составное число, то и 2^n-1 — составное, если n — простое[1], то 2^n-2 делится на $2n$ и, наконец, что простые делители числа 2^n-1 должны быть вида $2kn+1$; так, например, $2^{11}-1=23\cdot 89$, $223|2^{37}-1$ и $47|2^{23}-1$. Таким образом, для Ферма была очевидна ложность утверждения: если n — простое, то и 2^n-1 есть простое число. А ведь именно это утверждение является ближайшим следствием «теоремы китайцев». Действительно, если n — простое число, то $n|2^n-2$ и, следовательно,

$$2^n-1 \mid 2^{2^n-2}-1 \mid 2^{2^n-1}-2,$$

откуда, по теореме китайцев, 2^n-1 есть простое число.

Реконструкция Банахевича неубедительна. Нельзя согласиться и с его замечанием о том, что «ошибочное утверждение китайских жрецов возродилось в Европе в измененной форме, в виде ошибочной теоремы Ферма». Суть дела не в форме: эти утверждения не эквивалентны (в том смысле, что из ложной теоремы Ферма непосредственно не вытекает «теорема китайцев»).

Банахевич утверждает, что Ферма знал, что делители F_n следует искать только среди чисел вида $k\cdot 2^{n+1}+1$, где k — натуральное число, и поэтому Ферма мог исключить возможность делимости F_n на многие простые числа. Но и это неубедительно. Нельзя приписывать Ферма то, что у него могло бы быть. Ферма знал, что ни одно простое число вида $4k-1$ не может быть делителем суммы двух взаимно простых квадратов и, следовательно, простые делители F_n должны быть вида $4k+1$. Уточнение формы делителей F_n было выполнено Эйлером.

Воспроизведем здесь рассуждение Эйлера в сокращенном виде[2]. Пусть p — простое нечетное число, $p \nmid a$ и $p \nmid b$. Тогда по малой теореме Ферма, $p|a^{p-1}-b^{p-1}$ и, следовательно, $p \nmid a^{p-1}+b^{p-1}=(a^{p-1}-b^{p-1})+2b^{p-1}$. Поэтому, если $p=4k-1$, то $p \nmid a^{4k-2}+b^{4k-2}=(a^2+b^2)(a^{4k-4}-\ldots)$ и, значит, $p \nmid a^2+b^2$. Доказав теорему Ферма, Эйлер пошел дальше. Он замечает, что при взаимно простых a и b нечетные делители суммы $a^4+b^4=(a^2)^2+(b^2)^2$ могут быть только вида $4k+1$, т. е. либо вида $8k+1$, либо вида $8k-3$. Если $p=8k-3$ — простое число, то $p \nmid a^{8k-4}+b^{8k-4}=(a^4)^{2k-1}+(b^4)^{2k-1}$ и, значит, $p \nmid a^4+b^4$. Таким образом, нечетные простые делители суммы двух взаимно простых биквадратов могут быть только вида $8k+1$. Аналогично устанавливается, что нечетные простые делители суммы a^8+b^8 должны быть вида $16k+1$ и что вообще, если $(a, b)=1$, то нечетные простые делители суммы $a^{2^n}+b^{2^n}$ должны быть вида $2^{n+1}\cdot k+1$.

Четверть века Ферма не расставался со своей любимой теоремой о простоте чисел F_n. Эйлер, пытавшийся вначале доказать эту теорему, опроверг ее в 1732 г., показав, что F_5 есть число составное. Если бы Ферма знал, что делители F_5 должны быть вида $64k+1$, то, проверив простые числа 193, 257, 449, 577, 641, он при пятой пробе обнаружил бы, что $641|F_5$.

Неудача Ферма с числами F_n, а также другие ошибочные утверждения его заставляют думать, что Ферма не умел доказывать многие из теорем, полученных им путем наблюдений.

6 (стр. 47). Некоторые сведения о псевдопростых числах приводятся в книге В. Серпинского «Что мы знаем и чего не знаем о простых числах» (стр. 36—38).

---

[1] Нужно: простое нечетное.

[2] L. Euler. Opera omnia, серия 1, том 2, стр. 69—73.

7 (стр. 52). Китайской теореме об остатках посвящен § 3 в книге В. Серпинского «О решении уравнений в целых числах». Воспроизведем здесь формулировку этой теоремы: если m — натуральное число $\geqslant 2$, $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — попарно взаимно простые натуральные числа и $r_1, r_2, \ldots, r_m$ — произвольные целые числа, то существуют целые числа $x_1, x_2, \ldots, x_m$, удовлетворяющие системе уравнений

$$a_1x_1+r_1=a_2x_2+r_2=\ldots=a_mx_m+r_m.$$

Китайцы практически владели этой теоремой уже не позднее III в. Однако об этом в Европе стало известно лишь в середине XIX в. Таким образом, наименование «китайская теорема об остатках» могло появиться не ранее, чем во второй половине XIX в. Арифметические задачи, решение которых основано на этой теореме, рассматривались в разные времена в различных странах. См: L. E. Dickson. History of the theory of numbers, т. 2. Washington, 1920, стр. 57—64. Новые данные о таких задачах и методах их решения в русских рукописях XVII в. недавно сообщил А. П. Юшкевич в статье «Об одной задаче теории чисел в русских математических рукописях XVII в.» («Труды института истории естествознания и техники». М., 1957, стр. 300—311).

Китайской теореме об остатках Эйлер посвятил свой третий теоретико-числовой мемуар: «Решение арифметической задачи о нахождении числа, которое при делении на данные числа давало бы данные остатки» (на латинском языке; см. его «Opera omnia», сер. 1, т. 2, стр. 18—32). Решение задачи, указанной в названии мемуара, Эйлер сводит к решению системы линейных уравнений, число которых на единицу меньше числа неизвестных. Гаусс решение этой задачи свел в своих «Арифметических исследованиях» (§ 32—36) к решению системы сравнений первой степени. Но метод Гаусса, как подметил еще Энестрем («Bibliotheca mathematica», сер. 3, т. 9, 1908—1909, стр. 339), по существу совпадает с методом, разработанным Эйлером.

8 (стр. 82). Недавно был получен более общий результат. Доказано, что для любого натурального числа a существует арифметическая прогрессия Q, состоящая из бесконечного числа натуральных чисел, такая, что число ka^n+1 является нечетным и составным для каждого натурального числа n и любого числа k из прогрессии Q. См.: R. Bowen. The sequence ka^n+1 composite for all n, American Math. Monthly, 71, 1964, стр. 175—176.

9 (стр. 87). Теорию диофантовых уравнений иногда называют диофантовым анализом. В диофантовом анализе рассматриваются уравнения и системы уравнений (если это алгебраические уравнения, то — с целыми коэффициентами), которые нужно решить в числах определенного вида; например: в рациональных, целых, натуральных, треугольных или простых числах. В задачах диофантова анализа число неизвестных обычно превосходит число уравнений и поэтому последние называют неопределенными.

Во все времена, начиная с глубокой древности, неопределенные уравнения привлекали внимание математиков. Теперь известно, что уже около 1700 г. до н. э. вавилонские математики умели решать так называемое пифагорово уравнение $x^2+y^2=z^2$ в рациональных числах, а значит, учитывая однородность уравнения, и в целых числах.

Бо́льшую часть всех исследований в теории чисел можно отнести к диофантову анализу. Так, например, вопрос о представлении данного целого числа m бинарной квадратичной формой $ax^2+bxy+cy^2$ сводится к изучению неопределенного уравнения $ax^2+bxy+cy^2=m$ и, значит, принадлежит диофантову анализу. К диофантову анализу можно отнести многие вопросы теории разбиений и, в частности, знаменитый результат И. М. Виноградова, согласно которому уравнение $x+y+z=N$, где N — достаточно большое положительное нечетное число, разрешимо в простых числах x, y, z.

Теория чисел, по мнению П. Л. Чебышева, «рассматривает числа только в отношении их способности удовлетворять неопределенным уравнениям того или другого вида»[1]. Именно поэтому Чебышев считал, что «теория чисел, иначе называемая транс-

[1] П. Л. Чебышев. Полное собрание сочинений, т. 1. М.—Л., 1946, стр. 15.

цендентною арифметикою, есть наука о решении неопределенных уравнений в числах целых» [1]

Начало систематическому изучению неопределенных уравнений было положено греческим математиком Диофантом, жившим, по-видимому, в III в. Диофант умел находить решения неопределенных уравнений некоторых видов (до четвертой степени включительно) в рациональных положительных числах. Приемы Диофанта, вообще говоря, непригодны для отыскания целочисленных решений. Многие авторы подчеркивают сугубо искусственный и частный характер приемов Диофанта и отмечают отсутствие общих методов у него. Высказывается и противоположное мнение, которое можно выразить словами И. Г. Башмаковой: «Книги Диофанта (речь идет о дошедших до нас шести книгах «Арифметики» Диофанта. — *И. М.*) — не простой сборник задач, но систематическое изложение глубоко продуманных теоретических исследований» [2].

«Арифметика» Диофанта имела огромное значение для развития теории чисел. Ее влияние стало особенно ощутимым в XVII в., после появления латинского перевода (с греческим текстом), прокомментированного и опубликованного Баше де Мезириаком, в Париже в 1621 г. [3]. На полях экземпляра этого перевода Ферма оставил нам свои знаменитые примечания. По-видимому, к этому периоду следует отнести появление названия «Диофантов, или неопределенный, анализ» и постановку требования решения неопределенных уравнений в целых числах в качестве наиболее типичной задачи диофантова анализа [4].

После Диофанта наибольший вклад в теорию неопределенных уравнений внес Ферма. Ферма поставил ряд важнейших задач диофантова анализа и разработал некоторые методы его. Наследие Ферма (в известной своей части интригующее) служило отправным пунктом для исследований Эйлера, Лагранжа, Лежандра, Гаусса, Коши, Куммера и многих других математиков. Оно способствовало возникновению и развитию теории алгебраических чисел — одной из наиболее важных ветвей современной теории чисел. В свою очередь алгебраические числа способствовали расширению круга задач и средств диофантова анализа. В частности, возникла задача решения неопределенных уравнений в целых алгебраических числах того или иного числового поля.

Ни в одном из разделов математики так остро не ощущается недостаточность методов, как в диофантовом анализе. В наилучшем положении здесь оказалась проблема решения в целых числах целочисленных алгебраических уравнений с двумя неизвестными. Теория уравнения первой степени $ax+by=c$ была завершена в начале XVII в. Баше де Мезириаком. Полная теория уравнения второй степени $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ была создана общими усилиями Ферма, Броункера, Валлиса, Эйлера и Лагранжа и к началу XIX в. была подытожена Гауссом. В XX в. несколько выдающихся результатов было получено советскими математиками. Так, Б. Н. Делоне дал полное решение неопределенного уравнения $ax^3+y^3=1$, где a — натуральное число, не являющееся кубом, в целых числах x, y. Он же разработал метод решения в целых числах обширного класса уравнений вида $ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3=\sigma$. В. А. Тартаковский дал метод решения всех уравнений вида $x^{2n}-\rho y^{2n}=1$, исключая уравнение $x^4-15y^4=1$. Д. К. Фаддеев дал метод решения одного класса уравнений четвертой степени, к которому принадлежит и уравнение $x^4-15y^4=1$. Норвежский математик А. Туэ еще в начале XX в. получил сле-

[1] П. Л. Чебышев. Полное собрание сочинений, т. I. М.—Л., 1946, стр. 15.

[2] И. Г. Башмакова. Об античной математике первых веков нашей эры. Историко-математические исслед., вып. XIV. М., 1961, стр. 480.

[3] Латинский перевод Баше был вторым. Первый латинский перевод «Арифметики» Диофанта был напечатан в 1575 г. Он был выполнен проф. греческого языка в Гейдельберге В. Гольцманом (Ксиландером). Первые арабские переводы Диофанта были сделаны в Багдаде Костой ибн Лукой (ум. в 912 г.) и затем Абу-л-Вафой (940—998).

[4] Еще ранее отдельные уравнения решались в целых числах древнегреческими математиками, в III в. — китайцами, в V, VII и XII вв. — индийцами, в IX—XI вв. — арабами и в XIII в. — в Европе Леонардо Пизанским.

дующую общую теорему: если $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n$ — неприводимый над полем рациональных чисел многочлен с целыми коэффициентами степени $n\geqslant 3$, то при любом целом b уравнение

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}y+\ldots+a_ny^n=b$$

не может иметь бесконечного множества решений в целых числах. Доказательство этой важной теоремы впервые было получено при помощи теории приближения алгебраических чисел рациональными. Эта теория возникла и развивалась в работах Лиувилля, А. Туэ, К. Зигеля, Д. Д. Мордухая-Болтовского, Р. О. Кузьмина, А. О. Гельфонда, Д. Дайсона, К. Рота, А. Бейкера и др. Большие трудности возникают перед исследователями при изучении алгебраических уравнений с тремя и более неизвестными, хотя и здесь за последние десятилетия советские и зарубежные математики (Д. К. Фаддеев, Т. Нагель и др.) получили ряд ценных результатов.

В заключение этого краткого обзора коснусь вопроса о знаменитой десятой проблеме Гильберта, в которой ставится вопрос о нахождении алгоритма, позволяющего для каждого диофантова уравнения выяснить, имеет ли оно целочисленное решение. В последнее время все чаще высказывается предположение, что такого алгоритма не существует; отрицательные решения ряда близких алгоритмических проблем получены недавно американскими математиками М. Дэвисом, Х. Патнэмом и Дж. Робинсон.

10 (стр. 93). Доказательство Морделла не является элементарным. Оно использует средства алгебраической теории чисел и примыкает к классическим исследованиям Морделла по уравнениям вида

$$ey^2=ax^3+bx^2+cx+d, \qquad (1)$$

где a, b, c, d и e — целые числа.

Преобразовав уравнение

$$y(y+1)=x(x+1)(x+2) \qquad (2)$$

к виду

$$2u^2=v^3-4v+2 \qquad (3)$$

(для этого достаточно умножить обе части уравнения (2) на 8 и положить $u=2y+1$, $v=2x+2$), Морделл привел задачу к исследованию уравнения (3) в кубическом поле $R(\Theta)$, где Θ — корень уравнения $\Theta^3-4\Theta+2=0$. В поле $R(\Theta)$ уравнение (3) можно представить в следующем виде:

$$2u^2=(v-\Theta)(v^2+\Theta v+\Theta^2-4). \qquad (4)$$

Далее Морделл работает с уравнением (4), опираясь на следующие арифметические свойства поля $R(\Theta)$: 1) целыми числами этого поля являются числа $a+b\Theta+c\Theta^2$, где a, b, c — целые рациональные числа; 2) единицами, т. е. делителями числа 1, являются числа $\pm\varepsilon^l\eta^m$, где $\varepsilon=\Theta-1$, $\eta=2\Theta-1$, а l и m пробегают все целые значения; 3) в поле $R(\Theta)$ имеет место теорема о единственности разложения на простые множители. Морделл установил, что уравнение (3) имеет решения в целых числах, получаемые только при $v=0$, ± 2, 4, 12. Тем самым он доказал, что уравнение (2) имеет в натуральных числах только два решения: $x=1$, $y=2$ и $x=5$, $y=14$, т. е. что числа $6=2\cdot 3=1\cdot 2\cdot 3$ и $210=14\cdot 15=5\cdot 6\cdot 7$ — единственные натуральные числа, являющиеся одновременно произведениями и двух и трех последовательных целых чисел. См.: L. J. Mordell, On the integer solutions of $y(y+1)=x(x+1)(x+2)$, Pacific Journal of Mathematics, т. 13, № 4, 1963, стр. 1347—1351.

Отметим попутно еще один интересный результат, полученный Г. Н. Ватсоном. Последний доказал, что уравнение $\frac{x(x+1)(2x+1)}{6}=y^2$ имеет лишь два решения

в натуральных числах, получаемых при $x=1$ и $x=24$, т. е. что существует только два пирамидальных числа, являющихся квадратами натуральных чисел.

В 1922 г. Морделл доказал, что если правая часть уравнения (1) не имеет квадратичного множителя относительно x, то уравнение (1) имеет лишь конечное число решений в целых числах x и y. Разыскание этих решений, вообще говоря, очень трудная задача. Исследования в этом направлении привели Морделла к важному результату о конечном базисе для рациональных точек на кривой третьего порядка. По теореме, носящей имя Морделла, все рациональные точки на кривой третьего порядка могут быть получены из конечного числа их посредством проведения касательных и секущих. Эта теорема играет основную роль в теории диофантовых уравнений третьей степени с двумя неизвестными, с которой читатель может познакомиться по прекрасной книге Б. Н. Делоне и Д. К. Фаддеева «Теория иррациональностей третьей степени», М., Изд-во АН СССР, 1940.

11 (стр. 109). Условие $0<w<\frac{\pi^2}{6}-1$ не является необходимым для того, чтобы имело место разложение вида

$$w=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\ldots+\frac{1}{x_n^2}, \qquad (1)$$

где w — рациональное число, x_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ — различные натуральные числа, а n определяется по числу w.

Опираясь на утверждение Эрдёша, Серпинский доказал, следующую теорему Шинцеля: для того чтобы рациональное число w давало разложение вида (1), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий: либо $0<w<\frac{1}{6}\pi^2-1$, либо $1\leqslant\omega<\frac{1}{6}\pi^2$. См.: W. Sierpiński. Uwagi do pewnego zagadnienia P. Erdösa, Roczn. Polsk. towarz. mat., сер. 2, т. 7, № 2, 1964, стр. 221—228. Теорема Шинцеля является следствием некоторых общих результатов, полученных Грахамом. См.: 1) R. L. Graham. On finite sums of unit fractions, Proc. London Math. Soc., сер. 3, т. 14, № 54, 1964, стр. 193—207; 2) R. L. Graham. On finite sums of reciprocals of distinct n-th powers, Pacif., J. Math., т. 14, № 1, 1964, стр. 85—92.

12 (стр. 110). Во второй статье Грахама, упомянутой в примечании [11], приводится это же разложение числа $\frac{1}{2}$. Там же приводятся разложения для $\frac{1}{3}$ и $\frac{5}{37}$:

$$\frac{1}{3}=2^{-2}+4^{-2}+10^{-2}+12^{-2}+20^{-2}+30^{-2}+60^{-2},$$

$$\frac{5}{37}=2^{-3}+5^{-3}+10^{-3}+15^{-3}+16^{-3}+74^{-3}+111^{-3}+185^{-3}+240^{-3}+296^{-3}+444^{-3}+1480^{-3}.$$

13 (стр. 114). Здесь автор мимоходом коснулся одной из интереснейших проблем диофантова анализа. Эйлер[1] сформулировал ряд утверждений, которые обобщаются следующей гипотезой: каковы бы ни были натуральные числа k и n, удовлетворяющие условию $2\leqslant k<n$, уравнение $x_1^n+x_2^n+\ldots+x_k^n=x_{k+1}^n$ не имеет решений в натуральных числах. Отсюда при $k=3$ и $n=4$ получаем утверждение о неразрешимости уравнения $x_1^4+x_2^4+x_3^4=x_4^4$ в натуральных числах. При $k=2$ гипотеза Эйлера совпадает с «великой теоремой Ферма». Уже последнее замечание показывает, как трудна эта проблема. Если гипотеза Эйлера верна и доказуема, то естественно ожидать, что вначале появятся доказательства ее частных случаев.

---

[1] L. Euler. Opera omnia, сер. 1, т. 4, стр. 331.

В 1914 г. А. Веребрюсов[1] предложил доказательство утверждения Эйлера о неразрешимости уравнения $x_1^4+x_2^4+x_3^4=x_4^4$ в натуральных числах. Указание на эту работу Веребрюсова имеется в книге Л. Диксона[2]. Но Диксон не заметил, что доказательство Веребрюсова ошибочно. Последнее было отмечено лишь в 1935 г. В. Падхи[3]. Подробный разбор ошибки Веребрюсова дал Э. Белл[4]. Правильность рассматриваемого частного утверждения Эйлера была подтверждена М. Уордом[5] до $x_4<10\,000$[6].

14 (стр. 122). Недавно было доказано, что в последовательности Фибоначчи только члены u_1, u_2 и u_{12} являются квадратами. См.: O. W y l e r. Squares in the Fibonacci series, American Math. Monthly, 71, 1964, стр. 220—222.

15 (стр. 135). Предложенное здесь решение, очевидно, может найти лишь тот читатель, который хорошо осведомлен об уравнении

$$2y^4-1=z^2. \qquad (1)$$

Это уравнение имеет интересную историю. Эйлер в письме к Гольдбаху от 2 сентября 1747 г. указал, что уравнение (1) имеет в рациональных числах y, z решения, которые получаются при $y=1$, 13, $\frac{1525}{1343}$, $\frac{2165017}{2372159}$. При этом он заявил, что не в состоянии найти другие решения в натуральных числах, кроме двух: $y=z=1$ и $y=13$, $z=239$. Позднее Эйлер предложил способ, позволяющий получать бесконечное множество решений в рациональных числах уравнения (1), но не доказал, что его способ дает все такие решения[7]. Уравнением (1) занимался также Лагранж. Ему принадлежит рекуррентная формула, при помощи которой могут быть найдены все решения этого уравнения в рациональных числах[8]. Уравнение (1) привлекало внимание и других исследователей. Известны попытки решения вопроса о числе решений уравнения (1) в натуральных числах, предпринимавшиеся до Люнгрена. Однако лишь последнему удалось доказать, что это уравнение имеет только два решения в натуральных числах — решения, которые нашел Эйлер[9]. Уравнение (1) играет важную роль во многих теоретико-числовых исследованиях[10].

Понятно, что уравнений, подобных уравнению (1), можно придумать сколько угодно. Стоит ли ими заниматься? Ответ на этот вопрос мы находим у П. Л. Чебышева: «Всякое уравнение, заключающее несколько переменных, подлежит исследованию теории чисел. Но не все они одинаково доступны исследованию и не все они имеют одинаковую важность по приложениям своим. Теория чисел до сих пор ограничивается только рассмотрением уравнений, наиболее простых и в то же время имеющих наиболее важные приложения»[11].

---

[1] А. Веребрюсов. L'Intermed, des Math., 21, 1914, стр. 161.

[2] L. E. Dickson. History of the theory of numbers, т. 2 1920, стр. 648.

[3] W. Padhy. The mathematics student, т. 3, № 2, 1935, стр. 100, 101.

[4] E. Bell. The mathematics student, т. 4, № 1, 1936, стр. 78.

[5] M. Ward. Proc. Nat. Acad. Sc., 31, 1945, стр. 125; Duke Math. J., 15, 1948, стр. 827—837.

[6] По словам Д. Х. Лемера (из письма к А. Шинцелю от 13 июля 1966 г.), Леон Ландер (США) 27 июня 1966 г. установил соотношение $27^5+84^5+110^5+133^5=144^5$, опровергающее гипотезу Эйлера для случая $k=4$, $n=5$. (Примечание при корректуре.)

[7] См.: L. Euler. Opera omnia, сер. I, т. 5. стр. 82—93.

[8] Эта формула приведена в книге: В. Серпинский. О решении уравнений в целых числах. М., Физматгиз, 1961, стр. 80.

[9] См.: W. Ljunggren. Zur Theorie der Gleichung $x^2+1=Dy^4$, Avh. Norske Vid. Akad. Oslo (Mat.-hat. klasse), 1, 1942, № 5, стр. 1—27.

[10] См.:, например: V. Tartakowskij. Auflösung der Gleichung $x^4-\rho y^4=1$. «Известия АН СССР», сер. VI, т. 20, 1926, стр. 301—324.

[11] П. Л. Чебышев. Полное собрание сочинений, т. I. М.—Л., 1946, стр. 15.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПОСТУЛАТА БЕРТРАНА (ТЕОРЕМЫ ЧЕБЫШЕВА)[1]

В. Серпинский

Если дано вещественное число x, то символом $[x]$ мы обозначаем [2] наибольшее целое число $\leqslant x$. Поэтому, в частности, $\left[\frac{3}{4}\right]=0$, $\left[-\frac{3}{4}\right]=-1$, $[\sqrt{2}]=1$, $[\pi]=3$. Из определения следует, что для каждого вещественного числа x будет $x-1<[x]\leqslant x$. Равенство $[x]=x$ имеет место тогда и только тогда, когда x есть целое число. Если k — целое число, то для любого вещественного x имеем $[x+k]=[x]+k$. Для любых вещественных чисел x и y, очевидно, имеем $[x]+[y]\leqslant[x+y]$. Например,

$$0=\left[\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{2}{3}\right]<\left[\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right]=1, \text{ но } \left[\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right]=0.$$

Теорема 1. Если n — натуральное число, то в разложении числа $n!$ на простые сомножители простое число p входит с показателем степени α, где

$$\alpha=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть n и k — два данных натуральных числах и p — простое число $\leqslant n$. Числа последовательности $1, 2, \ldots, n$, делящиеся на p^k, должны быть вида lp^k, где l — натуральное число, удовлетворяющее условию $lp^k\leqslant n$, так что $l\leqslant\frac{n}{p^k}$. Число значений l равно $\left[\frac{n}{p^k}\right]$. С другой стороны, ясно, что показатель степени α, с которым простое число p войдет в разложение $n!$ на простые сомножители, является суммой чисел, равных числу членов последовательности $1, 2, \ldots, n$, делящихся на p, числу членов, делящихся на p^2, числу членов, делящихся на p^3, и т. д. Отсюда и получается формула (1).

---

[1] Перевод извлечения из книги: W. Sierpiński. Elementary theory of numbers. Warszawa, 1964, стр. 131—139. В переводе принята своя нумерация формул и теорем. — *Прим. перев.*

[2] Символ $[x]$ читается: «Целая часть от x». — *Прим. перев.*

В качестве простого приложения теоремы 1 рассмотрим вопрос о числе нулей, которыми оканчивается число 100!.

Согласно формуле показатель, с которым число 2 входит в разложение числа 100! на простые сомножители, (1) есть

$$\left[\frac{100}{2}\right]+\left[\frac{100}{2^2}\right]+\left[\frac{100}{2^3}\right]+\ldots=50+25+12+6+3+1=97.$$

Показатель же числа 5 есть

$$\left[\frac{100}{5}\right]+\left[\frac{100}{5^2}\right]=20+4=24.$$

Отсюда следует, что запись числа 100! в десятичной системе счисления имеет на конце 24 нуля.

Лемма 1. Для натуральных $n>1$ имеем:

$$\binom{2n}{n}^{[1]}>\frac{4^n}{2\sqrt{n}}. \tag{2}$$

Доказательство. Неравенство (2) имеет место для $n=2$, так как $\binom{4}{2}=6>\frac{4^2}{2\sqrt{2}}$. Предположим, что неравенство (2) справедливо для натурального числа n. Тогда имеем:

$$\binom{2n+2}{n+1}=2\,\frac{2n+1}{n+1}\binom{2n}{n}>\frac{2(2n+1)4^n}{(n+1)2\sqrt{n}}=\frac{2(2n+1)4^n}{\sqrt{4n(n+1)}\sqrt{n+1}}>\frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}},$$

потому что $(2n+1)^2>4n(n+1)$, откуда $2n+1>\sqrt{4n(n+1)}$. Таким образом, доказательство справедливости неравенства (2) для натуральных $n>1$ получается при помощи индукции.

Лемма 2. Произведение P_n всех простых чисел $\leqslant n$ (где n — натуральное число) меньше, чем 4^n.

Доказательство. Лемма, очевидно, верна для $n=1$ и $n=2$. Пусть n — натуральное число >2. Предположим, что лемма справедлива для натуральных чисел $<n$. Если n — четное число, то $P_n=P_{n-1}$ и, значит, лемма справедлива для числа n. Если $n=2k+1$, где k — натуральное число, то каждое простое число p, такое, что $k+2\leqslant p\leqslant 2k+1$, является делителем числа

$$\binom{2k+1}{k}=\frac{(2k+1)2k(2k-1)\ldots(k+2)}{1\cdot 2\ldots k}. \tag{3}$$

Принимая во внимание, что

$$(1+1)^{2k+1}>\binom{2k+1}{k}+\binom{2k+1}{k+1}=2\binom{2k+1}{k},$$

имеем:

$$\binom{2k+1}{k}<4^k.$$

---

[1] О символе $\binom{n}{k}$ см. примечание на стр. 42 — *Прим. перев.*

Произведение всех (различных) простых чисел, таких, что $k+2 \leqslant p \leqslant 2k+1$, есть делитель числа (3). Следовательно, оно меньше, чем 4^k. По предположению о справедливости леммы для натуральных чисел, меньших n, произведение простых чисел $\leqslant k+1$ должно быть меньше чем 4^{k+1}. Поэтому $P_n = P_{2k+1} < 4^k \cdot 4^{k+1} = 4^{2k+1} = 4^n$, откуда $P_n < 4^n$. Таким образом, при помощи индукции устанавливается справедливость леммы для каждого натурального числа n.

Лемма 3. Если p — простой делитель числа $\binom{2n}{n}$, причем $p \geqslant \sqrt{2n}$, то p входит в разложение числа $\binom{2n}{n}$ на простые сомножители с показателем степени 1.

Доказательство. Согласно теореме 1 показатель, с которым простое число p входит в разложение числа $(2n)!$ на простые сомножители, есть $\left[\frac{2n}{p}\right]+\left[\frac{2n}{p^2}\right]+\left[\frac{2n}{p^3}\right]+\ldots$, а показатель, с которым оно входит в разложение числа $n!$, есть $\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots$.

Так как

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2},$$

то показатель, с которым простое число p входит в разложение числа $\binom{2n}{n}$ на простые сомножители, есть

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2n}{p^k}\right] - 2\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^k}\right] = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left[\frac{2n}{p^k}\right] - 2\left[\frac{n}{p^k}\right]\right).$$

Если $p \geqslant \sqrt{2n}$, то $p = \sqrt{2n}$ только в случае $n=2$. Поэтому для $n \neq 2$ мы имеем $p > \sqrt{2n}$, откуда $\alpha = \left[\frac{2n}{p}\right] - 2\left[\frac{n}{p}\right] < 2$. Следовательно, $\alpha < 2$ или так как α — целое число, $\alpha \leqslant 1$. Таким образом, лемма доказана для натуральных $n \neq 2$, а для $n=2$ ее справедливость устанавливается непосредственно, так как $\binom{4}{2} = 2 \cdot 3$.

Лемма 4. Каждый делитель числа $\binom{2n}{n}$, имеющий вид p^r, где p — простое число, а r — натуральное, не превосходит $2n$. Имеем:

$$\binom{2n}{n} \leqslant (2n)^{\pi(2n)}$$[1].

Доказательство. Если $p^r \mid \binom{2n}{n}$, то простое число p входит в разложение числа $\binom{2n}{n}$ на простые сомножители с показателем степени

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left[\frac{2n}{p^k}\right] - 2\left[\frac{n}{p^k}\right]\right) \geqslant r.$$

---

[1] Символ $\pi(x)$ означает число всех простых чисел $\leqslant x$. — *Прим. перев.*

Если бы было $p^r > 2n$, то для $k \geqslant r$ мы имели бы $\left[\frac{2n}{p^k}\right] - 2\left[\frac{n}{p^k}\right] = 0$ и, следовательно,

$$\alpha = \sum_{k=1}^{r-1}\left(\left[\frac{2n}{p^k}\right] - 2\left[\frac{n}{p^k}\right]\right).$$

Но так как для всех вещественных x справедливо неравенство $[2x]-2[x] \leqslant 1$, то последнее равенство дает $\alpha \leqslant r-1$, вопреки тому, что $\alpha \geqslant r$. Таким образом, $p^r \leqslant 2n$. Для доказательства второй части леммы заметим, что в разложение числа $\binom{2n}{n}$ на простые сомножители могут входить только простые числа $\leqslant 2n$. Отсюда $\binom{2n}{n} \leqslant (2n)^{\pi(2n)}$. Лемма показана.

Лемма 5. Если n — натуральное число >2, то ни одно простое число p, удовлетворяющее условию $\frac{2}{3}n < p \leqslant n$, не может быть делителем числа $\binom{2n}{n}$.

Доказательство. Если $\frac{2}{3}n < p \leqslant n$, то $\frac{2n}{p} < 3$ и $\frac{n}{p} \geqslant 1$. Следовательно, $\left[\frac{2n}{p}\right] \leqslant 2$, $\left[\frac{n}{p}\right] \geqslant 1$, что дает $\left[\frac{2n}{p}\right] - 2\left[\frac{n}{p}\right] = 0$[1]. Для $k > 1$ мы имеем $p^k > \frac{4}{9}n^2$ и, следовательно, $\frac{2n}{p^k} < \frac{9}{2n} < 1$ для $n > 4$. Поэтому $\left[\frac{2n}{p^k}\right] - 2\left[\frac{n}{p^k}\right] = 0$, для $k > 1$ и $n > 4$. Следовательно, для $n > 4$ число p входит в разложение $\binom{2n}{n}$ на простые сомножители с показателем 0, т. е. число $\binom{2n}{n}$ не делится на p. Таким образом, для $n > 4$ лемма справедлива. Для случаев $n = 3$ и $n = 4$ справедливость леммы устанавливается проверкой. В обоих случаях простое число p, удовлетворяющее условию $\frac{2}{3}n < p \leqslant n$, должно быть равно 3. Число же 3 не является делителем ни числа $\binom{6}{3} = 20$, ни числа $\binom{8}{4} = 70$.
Лемма доказана.

Лемма 6. Простое число p, удовлетворяющее условию $n < p < 2n$, входит в разложение числа $\binom{2n}{n}$ на простые сомножители с показателем степени, равным 1.

Доказательство. Для $n < p < 2n$ имеем $1 < \frac{2n}{p} < 2$, $\frac{n}{p} < 1$. Поэтому $\left[\frac{2n}{p}\right] = 1$, $\left[\frac{n}{p}\right] = 0$. Для $k \geqslant 2$ имеем $\frac{2n}{p^k} < \frac{2n}{p^2} < \frac{2}{n}$. Следовательно, для $n > 1$ $\frac{2n}{p^k} < 1$, так что $\left[\frac{2n}{p^k}\right] = 0$, а значит, и подавно $\left[\frac{n}{p^k}\right] = 0$. Таким образом, показатель α, с которым p входит в разложение числа $\binom{2n}{n}$ на простые сомножи-

---

[1] Это следует из того, что $\left[\frac{2n}{p}\right] - 2\left[\frac{n}{p}\right] \leqslant 2 - 2\cdot 1 = 0$, так что $\left[\frac{2n}{p}\right] - 2\left[\frac{n}{p}\right] \leqslant 0$, а с другой стороны, для каждого вещественного x справедливо неравенство $[2x] - 2[x] \geqslant 0$. — *Прим. перев.*

тели, равен 1. Случай $n=1$ не нуждается в доказательстве, так как нет простых чисел p, удовлетворяющих условию $n < p < 2n$. Лемма доказана.

Лемма 7. Для натуральных чисел $n \geqslant 14$ имеет место неравенство

$$\pi(n) \leqslant \frac{1}{2} n - 1.$$

Доказательство. Как легко подсчитать, $\pi(14) = 6 = \frac{14}{2} - 1$. Следовательно, лемма 7 справедлива для $n = 14$. Предположим, что n — натуральное число $\geqslant 15$. В последовательности $1, 2, \ldots, n$ четные числа $4, 6, 8, \ldots, 2\left[\frac{n}{2}\right]$ являются составными. Их число равно $\left[\frac{n}{2}\right] - 1$. Кроме того, в последовательность $1, 2, \ldots, n$ при $n \geqslant 15$ входят нечетные числа $1, 9, 15$, также не являющиеся простыми. Поэтому

$$\pi(n) \leqslant n - \left(\left[\frac{n}{2}\right] - 1 + 3\right) = n - \left[\frac{n}{2}\right] - 2 < \frac{n}{2} - 1$$

(так как $\left[\frac{n}{2}\right] > \frac{n}{2} - 1$). Таким образом, $\pi(n) < \frac{n}{2} - 1$ для $n \geqslant 15$, и тем самым лемма полностью доказана.

Лемма 8. Пусть R_n обозначает произведение всех простых чисел p таких, что $n < p \leqslant 2n$, и пусть $R_n = 1$ в случае, когда таких простых чисел нет. Тогда

$$R_n > \frac{4^{\frac{n}{3}}}{2\sqrt{n}\,(2n)^{\sqrt{\frac{n}{2}}}} \qquad (4)$$

для всех натуральных $n \geqslant 98$.

Доказательство. Из определения R_n непосредственно вытекает, что $R_n \mid \binom{2n}{n}$. Следовательно, $\binom{2n}{n} = Q_n R_n$, где Q_n — натуральное число. Отсюда на основании леммы (6) мы заключаем, что ни одно простое число p, удовлетворяющее условию $n < p \leqslant 2n$, не входит в разложение числа Q_n на простые сомножители. Таким образом, простые p, которые содержатся в этом разложении, должны быть $\leqslant n$. Но тогда по лемме 5 они же должны быть $\leqslant \frac{2}{3} n$. Итак, произведение всех различных простых чисел p таких, что $p \mid Q_n$, не превосходит произведение всех простых чисел $\leqslant \frac{2}{3} n$ и, следовательно, по лемме 2 будет $< 4^{\left[\frac{2n}{3}\right]} \leqslant 4^{\frac{2n}{3}}$. На основании леммы 3 и соотношения $\left(Q_n \mid \binom{2n}{n}\right)$ заключаем, что показатель простого p в разложении числа Q_n на простые сомножители может быть >1 только в случае, когда $p < \sqrt{2n}$. Число же таких простых чисел по лемме 7 (получающееся при замене в ней n на $[\sqrt{2n}]$, что возможно, так как ввиду условия $n \geqslant 98$ имеем $\sqrt{2n} \geqslant 14$, откуда $[\sqrt{2n}] \geqslant 14$) меньше чем $\frac{\sqrt{2n}}{2}$.

По лемме 4 произведение степеней таких простых чисел, входящих в разложение числа $\binom{2n}{n}$ на простые сомножители, а значит, и подавно произведение степеней таких простых чисел, входящих в разложение Q_n на простые сомножители, будет меньше чем $(2n)^{\frac{\sqrt{2n}}{2}}$. Отсюда следует, что $Q_n < 4^{\frac{2n}{3}} (2n)^{\frac{\sqrt{2n}}{2}}$. Но так как $\binom{2n}{n} = Q_n R_n$ и по лемме 1 $Q_n R_n > \frac{4^n}{2\sqrt{n}}$, то легко получаем формулу (4). Лемма доказана.

Лемма 9. *Для натуральных чисел $k \geqslant 8$ имеем $2^k > 18(k+1)$.*

Доказательство. Имеем $2^8 = 256 > 18 \cdot 9$. Если же $2^k > 18(k+1)$, то $2^{k+1} = 2^k + 2^k > 18k + 18 + 18k + 18 > 18k + 36 = 18(k+2)$. Таким образом, доказательство леммы получается при помощи индукции.

Лемма 10. *Для вещественных чисел $x \geqslant 8$ имеем $2^x > 18x$.*

Доказательство. Для вещественных чисел $x \geqslant 8$ имеем $[x] \geqslant 8$. Следовательно, по лемме 9 $2^x \geqslant 2^{[x]} > 18([x]+1) > 18x$, откуда $2^x > 18x$, ч. и т. д.

Лемма 11. *Для натуральных чисел $k \geqslant 6$ имеем $2^k > 6(k+1)$.*

Доказательство. Принимая во внимание лемму 9, достаточно доказать лемму 11 для $k=6$ и $k=7$. Но $2^6 = 64 > 6 \cdot 7$ и $2^7 = 128 > 6 \cdot 8$.

Лемма 12. *Для вещественных чисел $x \geqslant 6$ имеем $2^x > 6x$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 10.

Лемма. 13. Если n — натуральное число $\geqslant 648$, то $R_n > 2n$.

Доказательство. Принимая во внимание лемму 8, достаточно доказать, что если $n \geqslant 648$, то $4^{\frac{n}{3}} > 4n\sqrt{n}(2n)^{\sqrt{n/2}}$. Замечаем, что если $n \geqslant 648$, то $\frac{\sqrt{2n}}{6} > 6$ и по лемме 12 имеем неравенство $2^{\frac{\sqrt{2n}}{6}} > \sqrt{2n}$, откуда, возвысив обе его части в степень с показателем $\sqrt{2n}$, получим $2^{\frac{n}{3}} > (2n)^{\sqrt{n/2}}$. Но так как $n \geqslant 648$ и, значит, $\frac{2n}{9} > 8$, то по лемме 10 имеем $2^{\frac{2n}{9}} > 4n$, откуда $2^{\frac{n}{3}} > 4n\sqrt{4n} > 4n\sqrt{n}$. Таким образом, для $n \geqslant 648$ имеем $2^{\frac{n}{3}} > (2n)^{\sqrt{n/2}}$ и $2^{\frac{n}{3}} > 4n\sqrt{n}$, откуда $4^{\frac{n}{3}} > 4n\sqrt{n}(2n)^{\sqrt{n/2}}$. Лемма доказана.

Лемма 14. Если $n \geqslant 648$, то между n и $2n$ содержится по крайней мере два различных простых числа.

Доказательство. Из определения числа R_n следует, что если бы между n и $2n$ содержалось бы самое большее одно простое число, то мы имели бы $R_n \leqslant 2n$, что для $n \geqslant 648$ невозможно, так как противоречит лемме 13.

Теорема 2. Если n — натуральное число > 5, то между n и $2n$ содержится по крайней мере два различных простых числа.

Доказательство. Для $n=6$ теорема, очевидно, верна, так как между числами 6 и 12 лежат простые числа 7 и 11. Таким образом, принимая во внимание лемму 14, достаточно доказать, что теорема справедлива для каждого натурального числа n, такого, что $7 \leqslant n < 648$. Чтобы это показать, нет необходимости проверять теорему непосредственно для каждого из натуральных чисел 7, 8, . . . , $a=647$. Достаточно составить возрастающую последовательность простых чисел $q_0, q_1, \ldots, q_m$, таких, что $q_0=7$, $q_k < 2q_{k-2}$ для $k=2, 3, \ldots, m$ и $q_{m-1} > a$. Действительно, пусть n означает какое-нибудь натуральное число, такое, что $7 \leqslant n \leqslant a$. Первый член последовательности $q_0, q_1, \ldots, q_m$ не превосходит n, последний же член $> a \geqslant n$ и, следо-

вательно, $>n$. Таким образом, существует наибольший индекс k, меньший $m-1$, такой, что $q_k \leqslant n$. Итак, имеем $k+2 \leqslant m$, $n < q_{k+1}$. Принимая же во внимание соотношение $q_{k+2} < 2q_k \leqslant 2n$, устанавливаем, что между n и $2n$ содержится по крайней мере два простых числа: q_{k+1} и q_{k+2}.

При помощи таблицы простых чисел нетрудно проверить, что последовательность, определенная выше, есть последовательность 7, 11, 13, 19, 23, 37, 43, 73, 83, 139, 163, 277, 317, 547, 631, 653, 1259.

Покажем, что из доказанной теоремы 2 непосредственно вытекает

Теорема 3 (Чебышева). Если n — натуральное число >3, то между n и $2n-2$ содержится по крайней мере одно простое число.

Для $n=4$ и $n=5$ теорема верна, так как между 4 и 6 содержится простое число 5, а между 5 и 8 — простое число 7. Если $n>5$, то согласно теореме 2 между n и $2n$ содержится по крайней мере два простых числа. Если наибольшее из них $q=2n-1$, то другое должно быть $<2n-2$, так как $2n-2$ для $n>5$ есть составное число. Таким образом, $n<p<2n-2$. Если же $q<2n-1$, то, так как $p<q$, мы опять имеем $n<p<$ $<2n-2$.

Теорема 3 была сформулирована Ж. Бертраном в 1845 г. и впервые была доказана П. Л. Чебышевым в 1850 г. Доказательство, изложенное выше, представляет собой модификацию доказательства П. Эрдёша [1] [1], принадлежащую Л. Кальмару.

Следствие 1. Если n — натуральное число >1, то между n и $2n$ содержится по крайней мере одно простое число.

Доказательство. По теореме 3 это следствие справедливо для натуральных чисел >3. Для натуральных же $n=2$ и $n=3$ следствие также справедливо, так как между числами 2 и 4 содержится простое число 3, а между числами 3 и 6 содержится простое число 5.

В 1892 г. Дж. Дж. Сильвестр [2] доказал следующее обобщение следствия 1:

Если $n>k$, то в последовательности n, $n+1$, $n+2$, . . . , $n+k-1$ существует по крайней мере одно число, имеющее простой делитель $>k$. Отсюда следствие 1 получается при $n=k+1$. Это обобщение доказал также И. Шур [3] в 1929 г. Короткое и более элементарное доказательство дал П. Эрдёш [4] в 1934 г. (ср. Эрдёш [5]).

Следствие 2. Для натуральных чисел $k>1$ имеем $p_k<2^k$ [2].

Доказательство. Имеем $p_2=3<2^2$. Если для натурального числа k справедливо неравенство $p_k<2^k$, то по следствию 1 существует по крайней мере одно простое число, содержащееся между 2^k и 2^{k+1}, которое, очевидно, больше чем p_k. Таким образом, будет справедливо и неравенство $p_{k+1}<2^{k+1}$, и доказательство следствия получается индукцией по k.

Следствие 3. Если $n>1$, то в разложении числа $n!$ на простые сомножители имеется по крайней мере один простой сомножитель с показателем степени 1.

Доказательство. Для $n=2$ следствие, очевидно, справедливо. Если $n=$ $=2k>1$, где k — натуральное число, >1, то, на основании следствия 1, существует простое число p, такое, что $k<p<2k$, откуда $p<n<2p$ и, следовательно, p является делителем только одного из сомножителей произведения $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. С другой стороны, если $n=2k+1$, где k — натуральное число, то существует простое число p, такое, что $k<p\leqslant 2k<n$, откуда $2k<2p$ и, следовательно, $2k+1<2p$, так что, как и в первом случае, имеем $p<n<2p$ и, значит, снова убеждаемся в справедливости леммы

Из следствия 3 непосредственно вытекает

Следствие 4. Для натуральных чисел $n>1$ число $n!$ не является степенью натурального числа с натуральным показателем >1.

Выведем теперь из теоремы 2 следующее утверждение.

Теорема 4. Для натуральных чисел $k>3$ имеем $p_{k+2}<2p_k$.

[1] Здесь и далее в квадратных скобках указывается номер работы в списке литературы в конце статьи. — *Прим. перев.*

[2] Символом p_k обозначают k-е по порядку простое число. — *Прим. перев.*

Доказательство. Пусть k — натуральное число >3. Тогда $p_k > p_3 = 5$. Согласно теореме 2 между p_k и $2p_k$ содержится по крайней мере два различных простых числа, а так как двумя наименьшими простыми числами, превосходящими p_k, являются числа p_{k+1} и p_{k+2}, то должно быть $p_{k+2} < 2p_k$, ч. и т. д.

Заметим, что, наоборот, из теоремы 4 можно непосредственно вывести теорему 2. Действительно, предположим, что теорема 4 верна и пусть n означает любое натуральное число >6. Итак, $n \geqslant 7$ и, значит, $p_4 = 7 \leqslant n$. Пусть p_k — наибольшее простое число, не превосходящее n; очевидно, $k > 3$ и $p_{k+1} > n$. По теореме 4 имеем $p_{k+2} < 2p_k \leqslant 2n$. Таким образом, между n и $2n$ содержится по крайней мере два простых числа: p_{k+1} и p_{k+2}. Следовательно, остается проверить справедливость теоремы 2 только для $n = 6$.

Итак, мы доказали, что теоремы 2 и 4 эквивалентны в том смысле, что каждая из них может быть легко выведена из другой.

Следствие 1. Имеем $p_{k+1} < 2p_k$ для $k = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Для $k = 4, 5, \ldots$ следствие 1 вытекает непосредственно из теоремы 4. Проверим следствие 1 для $k = 1, 2, 3$: $p_2 = 3 < 4 = 2p_1$, $p_3 = 5 < 6 = 2p_2$, $p_4 = 7 < 10 = 2p_3$.

Следствие 2. Для натуральных чисел $k > 1$ имеем $p_{k+2} < p_k + p_{k+1}$.

Доказательство. Для $k > 3$ соотношение вытекает непосредственно из теоремы 4: $p_{k+2} < 2p_k < p_k + p_{k+1}$ (так как $p_k < p_{k+1}$). Но оно имеет место также и для $k = 2$ и $k = 3$. Действительно, $p_4 = 7 < 3 + 5 = p_2 + p_3$ и $p_5 = 11 < 5 + 7 = p_3 + p_4$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Erdös P. Beweis eines Satzes von Tschebyschef, Acta Litt. Sci. Szeged, 5, 1932, стр. 194—198.

2. Sylvester J. J. On arithmetical series, Messenger Math., 21, 1892, стр. 1—19, 87—120.

3. Schur I. Einige Sätze über Primzahlen mit Anwendung auf Irreduzibilitätsfragen, S. B. Preuss. Akad. Wiss., Phus. Math. Kl., 23, 1929, стр. 1—24.

4. Erdös P. A theorem of Sylvester and Schur, J. London Math. Soc., 9, 1934, стр. 282—288.

5. Erdös P. On consecutive integers, Nieuw. Arch Wisk., (3), 3, 1955, стр. 124—128.

ТЕОРЕМА ШЕРКА[1]

В. Серпинский

Теорема (Х. Ф. Шерка). Для каждого натурального числа n при соответствующем выборе знаков «+» или «—» имеем:

$$p_{2n}=1\pm p_1\pm p_2\pm \ldots \pm p_{2n-2}+p_{2n-1} \quad (5)$$

и

$$p_{2n+1}=1\pm p_1\pm p_2\pm \ldots \pm p_{2n-1}+2p_{2n}. \quad (6)$$

Эти формулы были найдены[2] Шерком [1] в 1830 г. Доказательство их опубликовал С. С. Пилаи [2] в 1928 г. Доказательство, предлагаемое здесь, было опубликовано мною [3] в 1952 г. Сходное доказательство опубликовал Р. Тойфель [4] в 1955 г.

Доказательство. Будем говорить, что бесконечная последовательность $q_1, q_2, \ldots$ обладает свойством P, если она есть возрастающая последовательность натуральных чисел, за исключением первого члена нечетных, такая, что

$$q_1=2,\ q_2=3,\ q_3=5,\ q_4=7,\ q_5=11,\ q_6=13,\ q_7=17 \quad (7)$$

и

$$q_{n+1}<2q_n \quad (8)$$

для $n=1, 2, \ldots$.

В частности, принимая во внимание следствие 1 теоремы 4, заключаем, что последовательность $q_n=p_n$ (для $n=1, 2, \ldots$) обладает свойством P. Таким образом, чтобы доказать теорему Шерка, достаточно доказать, что при соответствующем выборе знаков формулы (5) и (6) имеют место для любой последовательности, обладающей свойством P.

Лемма. Если $q_1, q_2, \ldots$ — бесконечная последовательность, обладающая свойством P, то для $n\geqslant 3$ каждое натуральное нечетное число $\leqslant q_{2n+1}$ при соответствующем выборе знаков «+» или «—» представимо в форме

$$\pm q_1\pm q_2\pm \ldots \pm q_{2n-1}+q_{2n}.$$

Доказательство леммы. На основании (7) заключаем, что лемма справедлива для $n=3$. Действительно,

$1=-q_1+q_2+q_3-q_4-q_5+q_6,$
$3=q_1-q_2-q_3+q_4-q_5+q_6,$
$5=q_1+q_2+q_3-q_4-q_5+q_6,$
$7=-q_1-q_2-q_3-q_4+q_5+q_6,$
$9=q_1+q_2-q_3+q_4-q_5+q_6,$
$11=q_1-q_2-q_3-q_4+q_5+q_6,$
$13=q_1-q_2+q_3+q_4-q_5+q_6,$
$15=-q_1+q_2+q_3+q_4-q_5+q_6,$
$17=q_1+q_2-q_3-q_4+q_5+q_6.$

Заметим, что для $n=2$ лемма не имеет места, так как ни при одной комбинации знаков «+» или «—» равенство $5=\pm 2\pm 3\pm 5+7$ невозможно.

Предположим теперь, что лемма справедлива для натурального числа $n\geqslant 3$, и пусть $2k-1$ — нечетное число $\leqslant q_{2n+3}$. На основании (8) имеем $q_{2n+3}<2q_{2n+2}$ и поэтому $-q_{2n+2}<2k-1-q_{2n+2}<q_{2n+2}$.

Следовательно, можно выбрать знак «+» или «—» так, чтобы было $0\leqslant\pm(2k-1-q_{2n+2})<q_{2n+2}$. Согласно (8) имеем $q_{2n+2}<2q_{2n+1}$ и потому

$$-q_{2n+1}\leqslant\pm(2k-1-q_{2n+2})-q_{2n+1}<q_{2n+1};$$

---

[1] Перевод извлечения из книги: W. Sierpiński. Elementary theory of numbers, Warszawa, 1964, стр. 140—142. В переводе номера формул продолжают нумерацию формул предыдущей статьи. Ссылки на теоремы и формулы предыдущей статьи делаются без упоминания статьи.

[2] Но не доказаны — вопреки сказанному (по моей вине) на стр. 30 книги Серпинского «Что мы знаем и чего не знаем о простых числах» (М., 1963). — *Прим. перев.*

поэтому можно выбрать знак «+» или «—» так, что

$$0 \leqslant \pm\{\pm(2k-1-q_{2n+2})-q_{2n+1}\} \leqslant q_{2n+1}. \qquad (9)$$

Так как каждое из чисел q_{2n+1} и q_{2n+2} нечетно, то число, занимающее в неравенствах (9) среднее положение, есть натуральное нечетное число $\leqslant q_{2n+1}$. Следовательно, на основании индуктивного предположения, что лемма справедлива для числа n, мы можем заключить, что при соответствующем выборе знаков «+» или «—» имеет место равенство

$$\pm\{\pm(2k-1-q_{2n+2})-q_{2n+1}\} = \pm q_1 \pm q_2 \pm \ldots \pm q_{2n-1} + q_{2n}.$$

Отсюда при соответствующем выборе знаков «+» или «—» получаем:

$$2k-1 = \pm q_1 \pm q_2 \pm \ldots \pm q_{2n} \pm q_{2n+1} + q_{2n+2},$$

что доказывает справедливость леммы для числа $n+1$ и одновременно при помощи индукции — для всех натуральных чисел $n \geqslant 3$.

Следствие. При подходящем выборе знаков «+» или «—» имеем:

$$q_{2n+1} = \pm q_1 \pm q_2 \pm \ldots \pm q_{2n-1} + q_{2n}. \qquad (10)$$

Доказательство следствия. Так как q_{2n+1} — нечетное натуральное число, то для $n \geqslant 3$ формула (10) непосредственно следует из леммы. Для $n=1$ и $n=2$ прямой подсчет показывает, что если учесть (7), то $q_3 = q_1 + q_2$ и $q_5 = q_1 - q_2 + q_3 + q_4$.

Докажем теперь справедливость формул (5) и (6).

Доказательство формулы (6). Для $n \geqslant 3$ число $q_{2n+1} - q_{2n} - 1$ согласно (8) есть нечетное натуральное число $< q_{2n+1}$. Поэтому, на основании леммы, при соответствующем выборе знаков «+» или «—» имеем $q_{2n+1} - q_{2n} - 1 = \pm q_1 \pm q_2 \pm \ldots \pm q_{2n-1} + q_{2n}$, откуда (при $q_i = p_i$, $i = 1, 2, \ldots$) следует формула (6). Для $n=1$ и $n=2$ непосредственный подсчет показывает, что $q_3 = 1 - q_1 + 2q_2$, $q_5 = 1 - q_1 + q_2 - q_3 + 2q_4$. Таким образом, формула (6) справедлива для всех натуральных чисел n.

Доказательство формулы (5). На основании (8) имеем $q_{2n+2} < 2q_{2n+1}$ и замечаем, что $q_{2n+2} - q_{2n+1} - 1$ есть нечетное натуральное число $< q_{2n+1}$. Теперь, применяя лемму, для $n \geqslant 3$ при подходящем выборе знаков «+» или «—» имеем:

$$q_{2n+2} - q_{2n+1} - 1 = \pm q_1 \pm q_2 \pm \ldots \pm q_{2n-1} + q_{2n},$$

откуда

$$q_{2n+2} = 1 \pm q_1 \pm q_2 \pm \ldots \pm q_{2n-1} + q_{2n} + q_{2n+1}. \qquad (11$$

Кроме того, учитывая (7), имеем:

$$q_2 = 1 + q_1,\ q_4 = 1 - q_1 + q_2 + q_3,\ q_6 = 1 + q_1 - q_2 - q_3 + q_4 + q_5,$$

что доказывает формулу (11) для $n=0$, 1 и 2. Итак, формула (11) верна для $n=0$, 1, 2, ... и, следовательно (так как $q_i = p_i$, $i = 1, 2, \ldots$), верна формула (5) для $n = 1$, 2, 3, ... Таким образом, теорема Шерка доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Scherk H. F. Bemerkungen über die Bildung der Primzahlen aus einander, J. f. reine und angew. Math., 10, 1833, стр. 201—208. См. также: Scripta mathematica, 7, 1940, стр. 159.

2. Pillai S. S. On some empirical theorem of Scherk, J. Indian Math. Soc., 17, 1927—1928, стр. 164—171.

3. Sierpiński W. Sur une propriété des nombres premiers, Bull. Soc. Roy.Sci Liège, 21, 1952, стр. 537—539.

4. Teuffel R. Beweise für zwei Sätze von H. F. Scherk über Primzahlen, Jahresbericht der Deutsch. Math. Verein., 58, 1955, Abt. 1, стр. 43—44.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВАЦЛАВ СЕРПИНСКИЙ

250 ЗАДАЧ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Редактор *Ю. А. Гастев* Художественный редактор *В. С. Эрденко*
Технический редактор *Н. Ф. Макарова.* Корректор *К. А. Иванова*

Сдано в набор 25/IV 1968 г. Подписано к печати 25/XI—1968 г. $70 \times 90^1/_{16}$. Бумага типографская № 2. Печ. л. 11,7(10)+вкл. 0,146(0,125). Уч.-изд. л. 9,22+вкл. 0,05
Тираж 75 тыс. экз. (Тем. пл. 1968 г. № 164)

Издательство „Просвещение“ Комитета по печати при Совете Министров РСФСР
Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41

Типография № 2 Росглавполиграфпрома, г. Рыбинск, ул. Чкалова, 8
Заказ 1795. Цена 48 коп.

Серпинский Вацлав

С33 250 задач по элементарной теории чисел. Пер. с польского И. Г. Мельникова. М., «Просвещение», 1968.

160 с. (Матем. просвещение). 75 тыс. экз. 48 к.

Сборник задач по элементарной теории чисел (от совсем простых до довольно трудных), с решениями и комментариями. Может быть использована в работе школьных и студенческих математических кружков.

2—2—1
164—68

517.1